LECTIONES Geometricæ:

In quibus (præsertim)

GENERALIA *Curvarum Linearum* SYMPTOMATA

DECLARANTUR.

Auctore ISAACO BARROW, Collegii SS. *Trinitatis* in Acad. *Cantab.* Socio, & *Societatis Regiæ* Sodale.

Οἱ φύσει λογιστικοὶ εἰς πάντα τὰ μαθήματα, ὡς ἔπος εἰπεῖν, ὀξεῖς φαίνονται· οἵ τε βραδεῖς, ἂν ἐν τούτῳ παιδευθῶσι καὶ γυμνάσωνται, κἂν μηδὲν ἄλλο ὠφεληθῶσιν, ὅμως εἴς γε τὸ ὀξύτεροι αὐτοὶ αὑτῶν γίγνεσθαι πάντες ἐπιδιδόασιν. Plato de Repub. VII.

LONDINI,

Typis *Gulielmi Godbid*, & prostant venales apud *Johannem Dunmore*, M. DC. LXX.

LECT. VII.

ADhuc in *Vestibulo* hæremus ; nec aliud quàm velitamus.

I. Sint duo quanta A, B; quorum majus A ; adsumpto tertio quopiam X, erit $A + X . B + X \sqsupset A . B$.

Nam ob $X . A \sqsupset X . B$; erit componendo $X + A . A . \sqsupset X + B . B$. vel permutando $X + A . X + B \sqsupset A . B$.

II. In linea YZ signentur tria puncta, L, M, N ; & inter puncta L, N sumpto puncto quopiam E, alteróque G extra LN (versus Z) ; secetur EG in F, ut sit $GE . EF :: NL . LM$; cadet punctum F ad partes MZ: Fig. 61.

* 1 *hujus.* Nam est $NE . ME$ * $\sqsubset NL . ML :: GE . FE \sqsubset NE . PE$. ergo $FE \sqsubset ME$.

III. Sint rectæ BA, DC parallelæ ; item rectæ BD, GP parallelæ ; pérque punctum B ducantur utcunque duæ rectæ BT, BS ipsam GP secantes punctis L, K, dico fore $DS . DT :: KG . LG$. Fig. 62.

Nam est $KG . LG = KG . GB + GB . LG = PK . PS + PT . PL = DB . DS + DT . DB = DT . DS$.

IV. Esto triangulum BDT, basíque DB parallelam quamvis PG intersecent per B ductæ quæpiam duæ rectæ BS, BR punctis L, K ; dico fore $LG \times TD + KL \times RD . KG \times TD :: RD . SD$.

Fig. 63 Sumantur enim $BM = GP$, & $BN = LP$; & $BO = KP$, unde constat junctas PM, PN, PO ipsis TB, SB, RB (respectivè) parallelas esse. Et quoniam est $DM . PD :: DB . TD$. erit $DM \times TD = PD \times DB$. Similiter est $DN \times SD = PD \times DB$. quare $DM \times TD = DN \times SD = DM \times SD + MN \times SD$, transponendóque $DM \times TD - DM \times SD = MN \times SD$. Simili planè discursu

discursu est $DM \times TD - DM \times RD = MO \times RD$. quapropter erit $MN \times SD . MO \times RD :: TD - SD . TD - RD$. hoc est $LG \times SD . KG \times RD :: TD - SD . TD - RD$; vel (ad æquationem redigendo) $LG \times SD \times TD - LG \times SD \times RD = KG \times RD \times TD - KG \times RD \times SD$; transponendóque $LG \times SD \times TD + KG \times RD \times SD - LG \times SD \times RD = KG \times RD \times TD$. hoc est $LG \times SD \times TD + KL \times SD \times RD = KG \times RD \times TD$. vel (ad analogismum reducendo) $LG \times TD + KL \times RD . KG \times TD :: RD . SD$. Quod erat Propositum. Fig. 63.

V. Quòd si puncta T, R non ad easdem puncti D partes sita sint, erit $LG \times RD - KL \times TD . KG \times TD :: RD . SD$. Fig. 64.

Simili constabit id discursu ; quem piget repetere.

VI. Sint quatuor continuè proportionalium series æquinumeræ (quales adscriptas cernis) quarum cùm antecedentes primi, tum ultimi consequentes inter se proportionales sint ($A . \alpha :: M . \mu$; & $F . \varphi :: S . \sigma$) erunt ejusdem ordinis quilibet accepti quatuor etiam inter se proportionales (puta nempe, $D . \delta :: P . \pi$).

A.	B.	C.	D.	E.	F.
α.	β.	γ.	δ.	ε.	φ.
M.	N.	O.	P.	R.	S.
μ.	ν.	o.	π.	ρ.	σ.

Sunt enim $A\mu$, $B\nu$, Co, $D\pi$, $E\rho$, $F\sigma$, & αM, βN, γO, δP, εR, φS, } Continuè proportionales.

Cùm igitur sit $A\mu, = \alpha M$; & $F\sigma = \varphi S$, liquidum est fore $D\pi = \delta P$; ac idcircò $D . \delta :: P . \pi$. Ad utramque proportionalitatem (tam Arithmeticam quàm Geometricam) æquè spectat hæc Conclusio.

VII. Rectæ AB, CD parallelæ sint ; hásque secet positione data BD ; lineæ verò EBE, FBF ita relatæ sint, ut ductâ utcunque rectâ PG ad DB parallelâ ; sit semper PF eodem ordine media proportionalis inter PG, PE ; tum per quodvis designatum lineæ EBE punctum E transeat HE ipsis AB, CD parallela, sítque alia curva KEK talis, ut ductâ utcunque QL itidem ad DB parallelâ, sit QX eodem Fig. 65.

Fig. 65.

eodem semper ordine media inter Q L, Q I (eodem inquam illo, quo P F media fuerat inter P G, P E): dico lineas F B F, K E K analogas esse; hoc est ordinatas (quales Q R, Q K) eandem perpetuò inter se rationem habere; eandem scilicet illi quam habet P F ad P E.

Hoc è Lemmate proximè præmisso consectatur, uti patebit, ad subjectum Schema mentem advertendo.

$$\left.\begin{array}{lll} QS * & QR * & QI. \\ QL * & QK * & QI. \\ PG * & PF * & PE. \\ PE * & PE * & PE. \end{array}\right\} \text{Sunt } \div\div.\ \text{unde } QR.\ QK :: PF.PE.$$

Not. Pro lineis rectis A B, H E, C D substitui possent quælibet, etiam curvæ, parallelæ.

Fig. 66.

VIII. Sint rursus, in A concurrentes duæ rectæ A B, A D, rectaq; B D positione data; item duæ curvæ E B E, F B F sic relatæ, ut ductâ utcunque P G ad D B parallelâ, sit semper P F eodem ordine media proportionalis inter P G, P E; tum connexâ A E, sit alia curva K E K talis, ut ductâ quâpiam rectâ Q L I ad D B parallelâ sit semper Q K eodem ordine media inter Q L, Q I, quo fuit P F inter P G, P E; erit rursus linea F B F ipsi K E K analoga; seu perpetim Q R . Q K :: P F . P E.

$$\text{Nam } \left.\begin{array}{l} QS * QR * QI. \\ QL * QK * QI. \\ PG * PF * PE. \\ PE * PE * PE. \end{array}\right\} \text{sunt } \div\div. \quad \left.\begin{array}{r} \text{item } QS.QL :: \\ PG.PE. \\ \text{Et } QI.QI :: \\ PE.PE. \end{array}\right\} \text{ergò } QR.QK :: PF.PE.$$

Not. Pro rectis A B, A H, A D substitui possent tres quævis lineæ analogæ.

Fig. 67.

XI Item, sit circulus A G B, cujus centrum D; aliæque duæ curvæ E B E, F B F tales, ut per D ductâ quâcunque rect. D G, sit perpetuò D F eodem ordine media proportionalis inter D G, D E; tum centro D per E describatur circulus H E; sitque præterea curva K E K talis, ut ductâ per D quâpiam (ad circulum H E) rectâ D L, sit semper D K eodem ordine media inter D L, D I, quo fuerat D F inter D G, D E; erunt curvæ F B F, K E K analogæ, seu perpetuò D R . D K :: D F . D E.

$$\text{Nam rursus } \left.\begin{array}{l} DS. * DR. * DI. \\ DL. * DK. * DI. \\ DG. * DF. * DE. \\ DE. * DE. * DE. \end{array}\right\} \text{sunt } \div\div. \quad \text{unde } DR.DK :: DF.DE.$$

Rursus, pro circulis aliæ lineæ parallelæ, vel analogæ substitui possent.

X. Sint denuò duæ lineæ quævis A G B G, E B E; & altera F B F sic ad istas relata, ut ductâ utcunque à designato puncto D rectâ D G, sit perpetuò D F eodem ordine media proportionalis inter D G, D E; tum adsumatur linea H E L lineæ A G B analoga (seu talis, ut per D utcunque ductâ D L S, sint perpetuò D S, D L in eadem ratione) sit denuò linea K E K talis, ut ductâ utcunque D L, sit perpetuò D K eodem ordine media inter D L, D I, quo priùs D F inter D G, D E; erit itidem linea F B F lineæ K E K analoga.

$$\text{Rursus enim } \left.\begin{array}{l} DS. * DR * DI. \\ DL. * DK * DI \\ DG. * DF * DE \\ DE. * DE * DE \end{array}\right\} \text{sunt } \div\div;$$

Et tam primi quàm ultimi quatuor termini sunt proportionales. Unde liquet Propositum.

XI. Sit Arithmeticè proportionalium Series A. B. C. D. E. F; in qua sumptis quibuscunque duobus terminis D, F; sit terminorum à primo A (exclusivè) ad ipsum D numerus, N; & terminorum ab A (itidem exclusivè) ad F, sit numerus M; erit A —: D. A —: F :: N . M.

Nam esto differentia communis, X. est ergò D = A ± N X. & F = A ± M X. quare A —: D = N X. & A —: F = M X. unde A —: D . A —: F :: (N X . M X ::) N . M.

XII. Hinc, si duæ fuerint ejusmodi series; & in utraque sumantur

bini,

bini, eodem ordine sibi respondentes, termini (puta D, F in prima, & P, R in secunda) erit A —: D . A —: F :: M —: P . M —: R.

A. B. C. D. E. F.

M. N. O. P. Q. R.

Nam harum rationum utraque par est illi, quam habent ad se numeri N, M, quales in præcedente designati sunt.

Hi verò Numeri N, M vulgò terminorum, quibus aptantur, exponentes, aut Indices vocantur, in serie quavis proportionalium; quales nos semper in sequentibus intelligimus, ubi literas has adhibemus.

XIII. Sint quælibet quanta A, B, C, D, E, F continuè proportionalia Arithmeticè; nec non alia totidem, ab eodem termino A incipientia, Geometricè proportionalia; sit autem illorum secundum B non majus horum secundo M; erit quodlibet in serie Geometrica majus eo, quod ipsi coordinatur in serie Arithmetica.

A. B. C. D. E. F.

A. M. N. O. P. Q.

Est enim $A + N \sqsubset 2M$ (vel $\sqsubset$) $2B = A + C$. ergò $N \sqsubset C$. unde $M + N \sqsubset B + C = A + D$. Est autem $A + O \sqsubset M + N$. ergò $A + O \sqsubset A + D$. Et ideò $O \sqsubset D$. ergò $M + O \sqsubset B + D = A + E$. Est autem $A + P \sqsubset M + O$. ergò $A + P \sqsubset A + E$; adeóque $P \sqsubset E$. similique porrò discursu quoad velis.

XIV. Hinc, si rursus fuerint A, B, C, D, E, F $\div\div$ Arithmeticè; & A, M, N, O, P, Q sint $\div\div$ Geometricè; sitque ultimum F non minus ultimo Q; erit B majus quam M.

Nam si dicatur B non majus quàm M; erit indè F minus, quàm Q contra hypothesin.

Item, iisdem positis; erit penultimum E majus penultimo P.

XV. Nam si $F = Q$; constat ex præcedente fore $E \sqsubset P$ (scilicet utramque seriem invertendo) sin $F \sqsubset Q$; potiori jure liquet fore $E \sqsubset P$.

XVI. Quinimò demùm, iisdem positis, quodlibet in serie Arithmetica majus est coordinato quolibet in serie Geometrica; puta, C majus est quàm N.

Est

Est enim $E \sqsubset P$, ac indè $D \sqsubset O$; & hinc $C \sqsubset N$.

XVII. Consectatur hinc; si fuerint quatuor lineæ HBH, GBG, FBF, EBE sese intersecantes in B, ac ita versus se relatæ, ut ductâ utcunque rectâ DH ad positione datam DB parallelâ (in linea nempe DDD terminatâ) vel à designato puncto D projectâ DH; sit perpetuò DG inter DH, DE eodem ordine media proportionalis Arithmeticè, quo DF inter easdem media Geometricè; lineæ GBG, FBF sese mutuò contingunt. Fig. 68. 69.

Enimverò linea GBH extra lineam FBF totam cadere manifestum è præcedente.

XVIII. Ex isthinc etiam (quod strictim transcurrens moneo) diversis innumeris *Hyperbolarum*, aut *Hyperboliformium* generibus convenientes rectæ ἀσύμπτωτοι definiuntur. Sint nempe rectæ VD, BD positione datæ; sint item aliæ duæ rectæ AB, VI; ductâ verò liberè rectâ PG ad DB parallela, sit Pφ constantèr inter PG, PE eodem ordine media proportionalis Arithmeticè, quo PF inter easdem media Geometricè; quia jam (a) rectæ EG, Eφ semper eandem obtinent rationem, est linea φφφ recta; verùm linea VFF est *hyperbola*, vel *hyperboliformis* aliqua (communis quidem vel *Apolloniana hyperbola*, si PF sit inter ipsas PG, PE simpliciter media, sed alia diversi generis quædam *hyperboliformis*, si PF sit alterius cujuspiam ordinis media) atqui patet è penultima præmissa lineam φφφ eodem ordine respondenti lineæ VFF *asymptoton* esse. quod an πρέσβυ sit nescio, nobis certè πάρεργον fuit, hîc adnotâsse. Fig. 70. (a) 12 hujus.

XIX. A puncto assignato B ad datam positione rectam AC ductæ sint rectæ tres BA, BC, BQ; tum in QC producta sumatur ~~sumptum~~ punctum quodpiam D; per B recta (puta BR) duci potest (ad alterutras ipsius BQ partes) talis, ut à D projectâ quâcunque rectâ, ceu DN; sit hujus à rectis BQ, BR intercepta pars (FE) minor ejusdem à rectis BA, BC interceptâ parte (NM). Fig. 71.

Nam, primò, si BR ultra angulum ABC jaceat respectu puncti D, fiat $QR = CA$; & connectatur BR; tum utcunque ducatur DE, rectas secans, ut vides; & manifestum est, * è supra monstratis fore, $FE \sqsupset NM$. * Per 7. Lect. VI.

Sin BQ citra angulum ABC cadat versus D; (a) ducatur recta BH talis, ut à BQ, BH interceptæ minores sint interceptis à BQ, BA; & sumatur $HR = QC$; & connectatur BR; tum rursus utcunque ductâ DN, quæ rectas intersecet, ut exhibet Schema; quoniam. * Per VI. 8 Lect. Fig. 72.

(b) Constr. niam jam est KF (b) $\sqsupset$ NF; & KE* $\sqsubset$ MF; perspicuum est restare FE $\sqsupset$ NM.

Ita quidem ab una rectæ BQ parte recta BR duci potest, quæ minores ipsis MN intercipiat; (a) potest autem ab altera parte recta quoque duci, quæ minores intercipiat ipsis FE; unde totum liquet Propositum.

Fig. 73. XX. In recta DZ sint tria puncta D, E, F; & in F sit vertex anguli rectilinei BFC, cujus latera secet recta DBC; per E verò ducta sit recta EG; potest ab E recta duci (ceu EH) talis, ut à puncto D projectâ utcunque rectâ DK sit in hac à rectis EG, EH intercepta minor à rectis FC, FB interceptâ.

Ducantur ES ad FC, & ER ad FB parallelæ; & in primo casu, ubi punctum E puncto D vicinius est, (ob similitudinem triangulorum
(a) 19. hujus. ENM, FKI) manifestum est fore MN $\sqsupset$ IK; (a) potest autem ab E duci recta (puta EH) talis, ut interceptæ PO minores sint interceptis MN; ergò liquet.

In altero casu, ubi punctum F ipsi D propius, sumatur SL æqualis
Fig. 74. ipsi CB; & connectatur EL; Estque jam IK . MN :: FK . EN ::
(c) Constr. DF . DE :: FC . ES :: BC . RS (c) :: LS . RS (d) $\sqsubset$ QN.
(d) 6. Lect. VI. MN. quapropter est IK $\sqsubset$ QN. (a) potest autem ab E recta duci, ceu EH, sicut ab EG, EH interceptæ OP minores sint interceptis QN. quamobrem abundè constat Propositum.

Fig. 75. XXI. Curvam BA tangat recta BO in B; sitque recta BO æqualis curvæ BA; sumpto tunc in curva puncto quopiam K connectatur recta KO; erit KO major arcu KA.

Nam, quoniam recta minimum est inter bina puncta intervallum, est BK + KO $\sqsubset$ BO = BK + KA. ergò KA $\sqsubset$ KO.

XXII. Hinc, utcunque sumptis (ad easdem contactûs partes) duobus punctis K, L, connexâque rectâ KL; erit KL + LO $\sqsubset$ KA.

Nam, supra contactum versus A, est KL + LO $\sqsubset$ KO $\sqsubset$ KA.

Infra verò, est KL + LB $\sqsubset$ KB (ex hypothesibus *Archimedæis*) adeóque KL + LO $\sqsubset$ KA.

LECT.

LECT. VIII.

MIhi sanè videor (videbor & vobis, opinor) quod irridebat *sapiens ille Scurra, perquam exiguæ Civitati portas ingentes extruxisse*. Nec enim adhuc aliud quàm ad rem aliquanto propiùs enitimur, ad illam.

I. Hæc adsumimus. Si duæ lineæ (OMO, TMT) sese contingant, angulos ipsæ comprehendunt (OMT) rectilineo quovis angulo minores. Et vice versâ: Si duæ lineæ OMO, TMT) angulos contineant quovis rectilineo minores, illæ sese contingent (contingentibus saltem æquipollebunt). Fig. 76, 77.

Hujus *effati* rationem jampridem (ni fallor) attigimus.

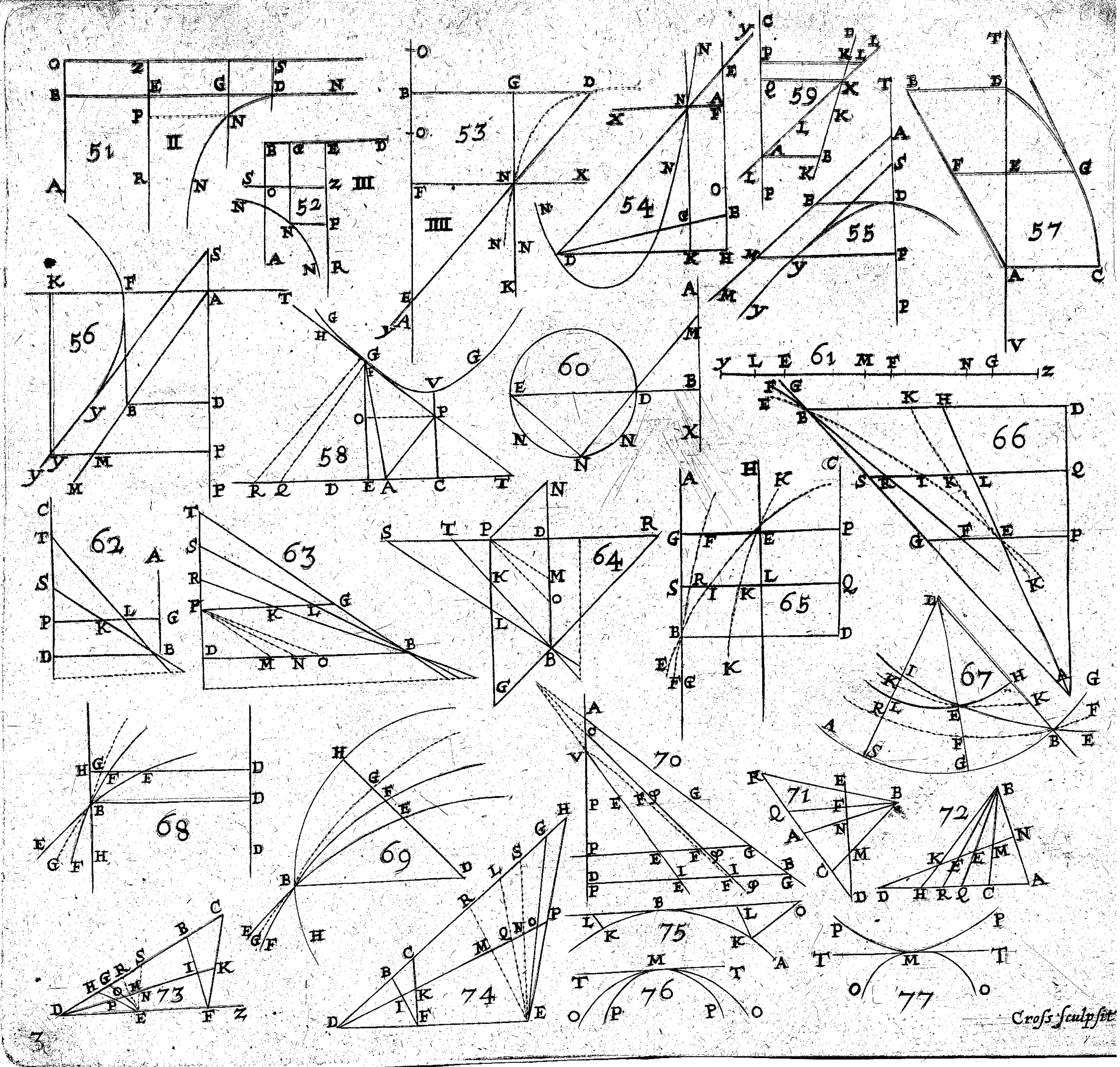
II. Hinc; Si duas lineas OMO, TMT tertia quæpiam linea PMP contingat, ipsæ etiam lineæ OMO, TMT sese contingent.

Nam quoniam lineæ OMO, PMP sese contingunt, erit angulus OMP quovis *rectilineo* minor. Item, ob linearum TMT, PMP *contractum*, erit *angulus* TMP quovis etiam *rectilineo* minor. Erit igitur angulus TMO *rectilineo* quovis minor. Unde lineæ OMO, TMT se mutuò contingent.

III. Tangat recta FA curvam FX in F; sitque positione data recta FE; sint item duæ curvæ EY, EZ tales, ut ductâ utcunque rectâ IL ad EF parallelâ (quæ lineas expositas secet, ut vides) sit semper intercepta KL æqualis interceptæ IG; etiam curvæ EY, EZ sese contingent. Fig. 78.

Si non tangant, potest inter ipsas constitui angulus rectilineus, puta BEC, hunc utcunque secet ad FE parallela IL; sumatúrque GH = BC, & connectatur FH; sunt igitur è parallelis ad FE à rectis

FG,


Cross sculpsit
3