LECTIONES Geometricæ:

In quibus (præsertim)

GENERALIA *Curvarum Linearum* SYMPTOMATA

DECLARANTUR.

Auctore ISAACO BARROW, Collegii SS. *Trinitatis* in Acad. *Cantab.* Socio, & *Societatis Regiæ* Sodale.

Οἱ φύσει λογιστικοὶ εἰς πάντα τὰ μαθήματα, ὡς ἔπος εἰπεῖν, ὀξεῖς φαίνονται· οἵ τε βραδεῖς, ἂν ἐν τούτῳ παιδευθῶσι καὶ γυμνάσωνται, κἂν μηδὲν ἄλλο ὠφεληθῶσιν, ὅμως εἴς γε τὸ ὀξύτεροι αὐτοὶ αὑτῶν γίγνεσθαι πάντες ἐπιδιδόασιν. Plato de Repub. VII.

LONDINI,

Typis *Gulielmi Godbid*, & prostant venales apud *Johannem Dunmore*, M. DC. LXX.

M × TP :: RP . SP ; & connectatur SF ; hæc curvam FBF tanget ; id quod omnino simili discursu demonstratur, quo tertia hujus ; tantùm hîc (non per E ad VD parallela ducitur, at) connectitur ET ; & loco septimæ allegatur octava septimæ Lectionis. quid plura?

XIII. Adnotetur, si linea EBE sit recta, (rectæ nempe BR coincidens) esse lineam FBF ex *infinitis hyperbolis* (vel *hyperboliformibus*) aliquam ; quarum igitur (unà cùm aliarum infinities diversi generis plurium) *Tangentes* determinandi modum uno *Theoremate* complexi sumus.

XIV. Quòd si puncta T, R non ad easdem partes puncti D (vel P)
Fig. 102. cadant ; curvæ FBF tangens (BS) designatur faciendo $N \times RD - \left.\begin{matrix} M \\ -N \end{matrix}\right\} \times TD . M \times TD :: RD . SD$.

Simili planè discursu constat hoc, tantùm (quartæ loco) septimæ Lectionis quintam adhibendo.

XV. Hinc autem nedum *Ellipsoidum* omnium (posito nempe lineam EBE rectam esse, lineæ BR coincidentem) ast aliarum alterius generis *linearum innumerabilium Tangentes* unâ operâ determinantur.

Exemplum. Si PF sit è quatuor mediis quarta, seu $M = 5$; & $N = 4$; erit $SD = \frac{5\,TD \times RD}{4\,RD - TD}$.

Notetur; Si contigerit esse $ND \times RD = \left.\begin{matrix} M \\ -N \end{matrix}\right\} \times TD$, esse DS infinitam ; seu BS ipsi VD parallelam. Alia possent adnotari ; sed relinquo.

XVI. Inter alias curvas innumeras, etiam hâc methodo *Cissois &*
Fig. 103. *Cissoidalium* omne genus comprehenditur: Sit utique semirectus angulus DSB ; curvæque duæ SGB, SEE sic ad se referantur, ut ductâ liberè rectâ GE ad BD parallelâ, (quæ lineas expositas, ut conspicis, secet) sint PG, PF, PE continuè proportionales ; tangat autem recta GT curvam SGB in G, reperietur quæ ad E lineam SEB tangit, faciendo $2\,TP - SP . TP :: SP . RP$; utique connexa RE curvam SEE tanget. Id quod è præmissis facilè colligitur. Quòd si jam curva SGB sit circulus, & applicationis angulus SPG sit

sit rectus, erit curva SEE *Cissois vulgaris*, seu *Dioclea* ; alioquin alterius generis *Cissoidalis*. Hoc autem ἐν παρόδῳ perstringo. Neq; jam ampliùs vos detinebo.

LECT. X.

INstitutum circa tangentes negotium adhuc urgeo.

I. Sit curva quæpiam AEG, nec non alia AFI sic ad illam rela- Fig. 104.
ta, ut ductâ quâcunque EF ad positione datam AB parallelâ (quæ curvam AEG secet in E, curvámque AFI in F (sit perpetim EF æqualis curvæ AEG ab A intercepto arcui AE ; tangat autem recta ET curvam AEG in E, sitque ET æqualis arcui AE, & connectatur recta TF ; hæc curvam AFI tanget.

Nam ducatur utcunque recta GK ad AB parallela, lineas propositas secans, ut cernis ; éstque $GK = GH + HK = GH + HT$ (a) $\sqsubset$ arc. $AG = GI$; unde punctum K extra curvam AFI situm est ; adeóque recta TK ipsam tangit. (a) 22 Lect. VII.

II. Quòd si recta EF quamlibet ad arcum AE rationem semper eandem habeat, nihilo seciùs recta FT curvam AFI tanget ; ut ex hac, & octavæ Lectionis sexta manifestæ consectatur.

Hæc antea pridem aliter ostendimus ; ast hæc demonstratio simplicior aliquanto videtur, & clarior ; methodóque quam insinuamus accommodatior.

III. Sit curva quæpiam AGE, punctúmque designatum D ; sit item alia curva AIF talis, ut à D projectâ rectâ quâcunque DEF, Fig. 105.
sit semper intercepta EF par arcui AE ; tangátque recta ET curvam AGE ; oportet curvæ AIF *Tangentem* (ad F) designare.

Fiat TE = arc. AE ; sitque curva TKF talis, ut ductâ utcunque (è D) rectâ DK (quæ curvam TKF secet in K, rectámque TE in H) sit

(a) 17. Lect. VIII. sit semper $HK = HT$; tum curvam TKF (a) tangat recta FS in F; hæc curvam AIF quoque continget.

(a) 22. Lect. VII. Est enim $GK = GH + HK = GH + HT$ (a) $GA = GI$. quare punctum K extra curvam AIF jacet; adeóque recta FS curvam AIF continget.

IV. Quòd si recta EF ad arcum AE eandem aliquamcunque statuatur habere proportionem, tangens ejus facilè determinatur ex hac, & octava octavæ Lectionis.

Fig. 106. V. Sint recta AP, duæque *curvæ* AEG, AFI, ità ad se relatæ ut ductâ utcunque rectâ DEF (quæ rectam AP, curvas AEG, AFI punctis D, E, F, secet) sit semper recta DT æqualis arcui AE; tangat autem recta ET curvam AEG ad E; sumatúrque ET par arcui EA; & sit TR ad BA parallela; connectatur denuò recta RF; hæc curvam AFI tanget.

(a) 22. Lect. VII. (b) 16. Lect. VI. * Hyp. (c) 3 Lect. VIII. (d) 2. Lect. VIII.

Concipiatur enim curva LFL talis; ut ductâ quâcunque rectâ PL ad AB parallelâ (quæ curvam AEG in G, rectam TE in H, curvam LFL in L secet) sit perpetuò recta PL æqualis ipsis TH, HG simul; est itaque PL (a) $\sqsubset$ arc. AEG* $= PI$. Unde curva LFL curvam AFI tangit. Item recta IK (b) æquatur rectæ TH; (c) adeóque curva LFL rectam RFK tangit; (d) quare curvam AFI tanget recta.

VI. Etiam si rectæ DE ad arcus AE quamlibet semper eandem rationem habeant, recta RF nihilominus curvam AFI tanget, ut ex hac, & sexta octavæ Lectionis facilè patet.

Fig. 107. VII. Sit punctum D; duæque curvæ AGE, DIF ità versus se relatæ sint, ut à puncto D projectâ quâvis rectâ DFE, sit perpetuò recta DF æqualis arcui AE; tangat autem recta ET curvam AGE ad E; designanda jam est recta, quæ curvam DIF tangat (ad F).

(a) 16. Lect. VIII. Sumatur ET par *arcui* FS; concipiatúrque *curva* DKK talis, ut à D projectâ utcunque rectâ DH (quæ curvam DKK in K, rectam TE in H secet) sit perpetuò $DK = TH$; tum curvam DKK (a) tangat recta FS ad F; hæc curvam DIF quoque tanget.

(b) 22. Lect. VII. (c) Hyp. (d) 4. Lect. VIII. Intelligatur enim *curva* LFL talis, ut à D projectâ quapiam rectâ DH (quæ rectam TE secet in H, curvam LFL in L) sit semper $DL = TH + HG$; est itaque DL (b) $\sqsubset$ arc. AG (c) $= DI$; (d) itaque curvæ DIF, LFL sese (b) contingent, item curvæ KFK,

LFK

(e) 2. Lect. VIII. LFK sese contingunt. (e) quare curvæ DIF, KFK se quoque contingent. (e) ergò denique recta FS curvam DIF continget.

VIII. Quòd si rectæ DF quamvis aliam constanter eandem ad arcus AE rationem obtinuerint, itidem designari potest recta curvam DIF tangens, ex hac, & septima octavæ Lectionis; erit utique tangens ista huic FS parallela.

IX. Hinc nedum *spiralis circularis*, ast innumerabilium simili ratione progenitarum aliarum curvarum *Tangentes* determinantur.

X. Sint curva quæpiam AEH, recta AD (in qua determinatum punctum D) recta DH positione data; sit item curva AGB talis, ut in hac assumpto quocunque puncto G, & per hoc ac D projectâ rectâ DGE (quæ curvam AEH secet in E) ductâque GF ad DH parallelâ habeant AE, AF assignatam rationem X ad Y; tangat autem recta ET curvam AEH; recta designetur oportet, quæ curvam AGB ad G tangat. Fig. 108.

Fiat recta EV æqualis arcui EA; & concipiatur curva OGO talis, ut projectâ quâcunque rectâ DOL (quæ curvam OGO secet puncto O, rectam ET in L) ductâque OQ ad GF parallelâ, sit $VL . AQ :: X . Y$; estque curva OGO (è suprà monstratis) *Hyperbola*; hanc tangat recta GS; etiam recta GS curvam AGB continget.

Nam concipiatur altera curva NGN talis, ut cùm hanc secet recta arbitraria DL in N, curvam AEH in K, rectam TE in L; ductâq; sit NR ad GF parallela, sit $VL + LK . AR :: X . Y$; manifestum est curvam NGN utramque curvam AGB, & OGO tangere. [secet enim recta DL curvam AEB in I, ducatúrque IP ad GF parallela; quum ergò sit $VL + LK . AR :: X . Y :: AK . AP$, & sit $VL + LK \sqsubset AK$; erit $AR \sqsubset AP$; vel $DR \sqsupset DP$; adeóque $DN \sqsupset DI$; unde punctum N intra curvam AGB semper cadet; ac proinde curva NGN curvam AGB tanget; similíque planè discursu curva NGN curvam OGO continget.] Itaque curvæ AGB, OGO sese (æquipollentèr) tangunt. Quare cùm recta GS curvam OGO tangat; eadem curvam AGB quoque continget: Q. E. F.

Si curva AEH sit circuli quadrans, cujus centrum D; erit curva AGB *Quadratrix communis*. Ejus igitur *Tangens* (unà cùm omnium simili ratione genitarum tangentibus) hoc pacto designatur,

Hujusmodi

Hujusmodi plura quædam cogitaram hîc inserere; verùm hæc existimo sufficere subindicando modo, juxta quem, citra *Calculi molestiam, curvarum tangentes* exquirere licet, unáque constructiones demonstrare. Subjiciam tamen unum aut alterum non aspernanda, ut videtur *Theoremata* perquam generalia.

XI. Sit linea quæpiam Z G E, cujus axis V D; ad quam imprimìs applicatæ perpendiculares (V Z, P G, D E) ab initio V Z continuè utcunque crescant; sit item linea V I F talis, ut ductâ quâcunq; Fig. 109. rectâ E D F ad V D perpendiculari (quæ *curvas* secet punctis E, F, ipsam V D in D) sit semper *rectangulum* ex D F, & designatâ quâdam R æquale *spatio* respectivè *intercepto* V D E Z; fiat autem D E. D F :: R. D T; & connectatur recta T F; hæc curvam V I F continget.

Sumatur enim in linea V I F punctum quodpiam I (illud primò supra punctum F, versus initium V) & per hoc ducantur rectæ I G ad Fig. 110. V Z, ac K L ad V D parallelæ (quæ lineas expositas secent, ut vides) éstque tum L F. L K :: (D F. D T ::) D E. R; adeóque $L F \times R = L K \times D E$. Est autem (ex præstituta linearum istarum natura) $L F \times R$ æquale spatio P D E G; ergò $L K \times D E = P D E G \sqsupset D P \times D E$. Unde est L K $\sqsupset$ D P; vel L K $\sqsupset$ L I.

Rursus accipiatur quodvis punctum I, infra punctum F, reliquáq; fiant, utì priùs; similíque jam planè discursu constabit fore $L K \times D E = P D E G \sqsubset D P \times D E$, unde jam erit L K $\sqsubset$ D P, vel L I. E quibus liquidò patet totam rectam T K F K intra (seu extra) curvam V I F I existere.

Iisdem quoad cætera positis, si *ordinatæ* V Z, P G, D E, *&c.* continuè decrescant, eadem conclusio simili ratiocinio colligetur; unicum obvenit *Discrimen*, quòd in hoc casu (contra quàm in priore) linea V I F concavas suas axi V D obvertat.

Corol. Notetur $D E \times D T$ æquari spatio V D E Z.

XII. Exindè deducitur hoc *Theorema*: Sint duæ lineæ quævis Fig. 111. Z G E, V K F ita relatæ, ut ad communem ipsarum axem V D applicatâ quâvis rectâ E D F, sit semper quadratum ex D E æquale *duplo spatio* V D E Z; sumatur autem D Q = D E, & connectatur F Q; hæc curvæ V K F perpendicularis erit.

Concipiatur enim linea V I F, per F transiens, talis qualem mox attigimus (cujus scilicet ad V D applicatæ se habeant ut spatia VDEZ, hoc est ut quadrata ex applicatis à curva V K F in præsente hypothesi) lineámque

lineámque V I F tangat recta F T; item lineam V K F tangat recta (a) 5. Lect. IX.
F S. Est ergò S D (a) = 2 T D. atqui $D E \times D T$ (b) = VDEZ. (b) Cor. præc.
ergò $D E \times S D = (2\ V D E Z =)$ F D q. unde constat angulum Q F S rectum esse. quod Propositum erat.

Adjungam & illis cognata hæc.

XIII. Sit curva quævis A G E Z, punctúmque quoddam D (à quo projectæ D A, D G, D E, *&c.* ab initio D A continuò decrescant) Fig. 112.
tum altera sit curva D K E, priorem intersecans in E, naturâque talis, ut à D utcunque projectâ rectâ D K G (quæ curvam A E Z secet in G, curvam D K E in K) sit perpetuò rectangulum ex D K, & designatâ quâdam lineâ R æquale spatio A D G; tum ductâ D T ad D E perpendiculari, sit D T = 2 R; & connectatur T E; hæc curvam D K E continget.

Nam sumpto quovis in curva D K E puncto K, ducatur recta DKG, & sumptâ D L = D K, ducatur L R ad D T parallela (secans ipsam D G in Y). tum per E ducatur E X ad D E perpendicularis (hæc verò extra curvam A E Z, ad partes Z cadet, quia decrescunt projectæ versus Z, unde E X versus A intra curvam E G A cadet; eatenus saltem, quatenus huic Proposito satisfaciet). Sit jam primò pun- Fig. 113.
ctum G supra E, versus initium A, & ob T D. D E :: R L. L E;
adeóque $R L \times D E = T D \times L E$ (a) $= 2 R \times L E$ (a) = 2 GDE (a) Hyp.
$\sqsubset$ 2 D E X $= E X \times D E$. ergò R L $\sqsubset$ E X $\sqsubset$ L Y. Est autem punctum Y extra curvam, quia D Y $\sqsubset$ D L = D K; ergò magis punctum R est extra curvam.

Sit rursus punctum G infra punctum E versus Z; éstque rursus, utì priùs, $R L \times D E = 2$ G D E $\sqsupset$ 2 triang. E D X $= E X \times D E$. unde R L $\sqsupset$ E X $\sqsupset$ L Y. Est autem recta L Y extra curvam E K tota, (nam etiam extra arcum L K curvæ K E circumductum tota jacet) ergò punctum R rursus extra curvam existit. Liquidum est igitur rectam T E R curvam D K E tangere.

Quòd si punctum aliud in curva D K E designetur, puta K; per quod ducta sit D K G; & fiat D G. D K :: R. P; sumatúrque D T = 2 P; & connectatur T G; tum ducatur K S ad G T parallela; recta K S curvam D K E tanget.

Nam concipiatur curva D O G, per G transiens, talis, ut rectâ quâcunque D O N à D projectâ (quæ curvam D O G secet in O, curvam D N E in M, curvam A G E in N) sit semper $D O \times P$ æqualis spatio A D N; erit ideò $D M \times R = D O \times P$; ac proinde D M. D O :: P. R. unde lineæ D K E, D O G analogæ erunt. Verùm

rùm ex jam modò oſtenſis G T curvam D O G tangit; ergò K S ipſam D K E continget.

Notetur eſſe $DGq \,.\, DKq :: 2R \,.\, DS$.

Nam eſt $DGq \,.\, DKq = DG.DK + DG.DK = R.P + DT.DS = R.P + 2P.DS = 2RP.\ P \times DS = 2R.DS$. itaque $DGq \,.\, DKQ :: 2R : DS$.

Hæc autem perinde vera ſunt, nec abſimili modò demonſtrantur; etiam ſi projectæ à D rectæ D A, D G, D E, *&c.* pares ſint (quo caſu curva A G E Z *Circulus* erit, & *Curva* D K E *Spiralis Archimedæa*) aut à D A continuò creſcant.

Exindè verò facilè colligitur hoc *Theorema*:

Fig. 114. XIV. Sint duæ curvæ A G E, D K E ità verſus ſe relatæ, ut à deſignato in curva D K E puncto D ductis rectis D A, D G (quarum hæc ipſam D K E ſecet in K) ſit ſemper *Quadratum* ex D K *Quadruplum ſpatii* A D G; ductâ D H ad D G perpendiculari, & facto $DK \,.\, DG :: DG \,.\, DH$; connexâque H K; erit H K curvæ D K E perpendicularis.

Nam concipiatur linea D O K O, per K tranſiens, naturâque talis ut ad illam à D projectæ (ceu DK) ſe habeant in eadem quâ ſpatia ADG ratione (quales lineas attigimus in proximè ſuperiori) & lineam D O K tangat recta K T, lineam D K E recta K S; conveniant autem hæ cum ipſa H D punctis T, S; eſt igitur (è præcedente) $DGq \,.\, DKq :: \frac{DK}{2} \,.\, DT$. hoc eſt $DH \,.\, DK :: \frac{DK}{2} \,.\, DT$; hoc eſt (quoniam è * mox præmonſtratis $DS = 2\,DT$) $DH \,.\, DK :: \left(\frac{DK}{2} \,.\, \frac{DS}{2} ::\right) DK \,.\, DS$. Liquet igitur rectam H K tangenti K S perpendicularem eſſe: Q. E. D.

* In 12. hujus.

Ità Propoſiti noſtri priore (quam innuebamus) parte quomodocunque defuncti ſumus. Cui ſupplendæ, appendiculæ inſtar, ſubnectemus à nobis uſitatum methodum ex Calculo tangentes reperiendi. Quanquam haud ſcio, poſt tot ejuſmodi pervulgatas atque protritas methodos, an id ex uſu ſit facere. Facio ſaltem ex Amici conſilio; eóque libentiùs, quòd præ cæteris, quas tractavi, compendioſa videtur, ac generalis. In hunc procedo modum.

Sint A P, P M poſitione datæ rectæ lineæ (quarum P M propoſitam curvam ſecet in M) & M T curvam tangere ponatur ad M, rectam

rectam A P ſecare ad T; ut ipſius jam rectæ P T quantitatem exquiram; curvæ arcum M N indefinitè parvum ſtatuo; tum duco rectas N Q ad M P, & N R ad A P parallelas; nomino $MP = m$; $PT = t$; $MR = a$; $NR = e$; reliquáſque rectas, ex ſpeciali curvæ natura determinatas, utiles propoſito, nominibus deſigno; ipſas autem M R, N R (& mediantibus illis ipſas M P, P T) per *æquationem* è Calculo deprehenſam inter ſe comparo; regulas interim has obſervans. Fig. 115.

1. Inter computandum omnes abjicio terminos, in quibus ipſarum a, vel e poteſtas habetur, vel in quibus ipſæ ducuntur in ſe (etenim iſti termini nihil valebunt).

2. Poſt *æquationem conſtitutam*, omnes abjicio terminos, literis conſtantes quantitates notas, ſeu determinatas deſignantibus; aut in quibus non habentur a, vel e. (etenim illi termini ſemper, ad unam æquationis partem adducti, nihilum adæquabunt).

3. Pro a ipſam m; (vel M P) pro e ipſam t (vel *P T*) ſubſtituo. Hinc demùm ipſius P T quantitas dignoſcetur.

Quòd ſi calculum ingrediatur curvæ cujuſpiam indefinita particula; ſubſtituatur ejus loco tangentis particula ritè ſumpta; vel ei quævis (ob indefinitam curvæ parvitatem) æquipollens recta.

Hæc autem è ſubnexis Exemplis clariùs eluceſcent.

Exemp. I.

Angulus A B H rectus ſit; & ſit curva A M O talis, ut per A ductâ utcunque rectâ A K, quæ rectam B H ſecet in K, curvam A M O in M, ſit ſemper ſubtenſa A M æqualis abſciſſæ B K; hujus curvæ ad M tangens eſt deſignanda. Fig. 116.

Fiant quæ ſupra præſcripta ſunt, & (ductâ A N L) nominetur $AB = r$; & $AP = q$; unde $AQ = q - e$; item $QN = m - a$. ergò eſt $qq + ee - 2qe + mm + aa - 2ma = (AQq + QNq = ANq =) BLq$; hoc eſt (rejectis, uti monitum eſt, rejiciendis) $qq - 2qe + mm - 2ma = BLq$. Porrò eſt $AQ \,.\, QN :: AB \,.\, BL$; hoc eſt $q - e \,.\, m - a :: r \,.\, BL = \frac{rm - ra}{q - e}$. quare $\frac{rrmm + rraa - 2rrma}{qq + ee - 2qe} = BLq$; ſeu (rejectis ſuperfluis) $\frac{rrmm - 2rrma}{qq - 2qe} = BLq = qq - 2qe + mm - 2ma$. vel $rrmm - 2rrma = q^4 - 2q^3e + qqmm - 2qqma - 2q^3e + 4qqee - 2qmme + 4qmae$; hoc eſt (abjectis iis, quæ præſcripſimus abjici-

abjicienda) $-2rrma = -4q^3e - 2qqma - 2qmme$. vel $rrma - qqma = 2q^3e + qmme$; vel denuò substituendo m pro a, & t pro e, est $rrmm - qqmm = 2q^3t - qmmt$; vel $\frac{rrmm - qqmm}{2q^3 - qmm} = t = PT$.

Exemp. II.

Fig. 117. Sit recta E A (positione ac magnitudine data) & curva E M O proprietate talis, ut ab ea utcunque ductâ rectâ M P ad E A perpendiculari *Summa Cuborum* ex A P, & M P æquetur *Cubo* rectæ A E.

Nominentur $AE = r$; $AP = f$; unde $AQ = f + e$; & AQ cub. $= f^3 + 3ffe + 3fee + e^3$; (seu abjectis superfluis, ex præscripto) $= f^3 + 3ffe$. Item NQ cub. $=$ cub. $m - a = m^3 - 3mma + 3maa - a^3$ (hoc est) $= m^3 - 3mma$. Quapropter est $f^3 + 3ffe + m^3 - 3mma =$ (AQ cub. + NQ cub. $=$ AE cub. $=$) r^3. abjectísque datis, est $3ffe = 3mma = 0$. seu, $ffe = mma$; subrogatísque loco a, & e ipsis m, & t, erit $fft = m^3$; seu $t = \frac{m^3}{ff}$; est ergò P T quarta proportionalis in ratione A P ad P M continuata.

Similiter, Si fuerit $APqq + MPqq = AEqq$; reperietur fore $PT = \frac{m^4}{f^3}$; vel PM quarta proportionalis in ratione A P ad P M; ac ità porrò; quod de *Cycloformibus* istis lineis an observatu dignum sit nescio.

Exemp. III.

Fig. 118. *La Galande* Positione data sit recta A Z, & A X magnitudine; sit etiam *curva* A M O talis, ut ductâ utcunque rectâ M P ad A Z normali, sit AP *cub.* + PM *cub.* $=$ AX × AP × PM.

Dicantur $AX = b$; & $AP = f$; ergò $AQ = f - e$; & AQ *cub.* $= f^3 - 3ffe$; & QN *cub.* $= m^3 - 3mma$. & AQ × QN $= fm - fa - me + ae = fm - fa - me$; unde AX × AQ × QN $= bfm - bfa - bme$; hinc æquatio $f^3 - 3ffe + m^3 - 3mma = bfm - bfa - bme$; seu amoliendo rejectanea,

$bfa - 3mma = 3ffe - bme$; substituendóque $bfm - 3m^3 = 3fft - bmt$; seu, $\frac{bfm - 3m^3}{3ff - bm} = t$.

Exemp. IV.

Sit *Quadratrix* C M V (ad circulum C E B pertinens cui centrum A,) cujus axis V A; ordinatæ C A. M P ad V A perpendiculares.

Fig. 119. Protractis rectis A M E, A N F, ductísque rectis E K, F L ad A B perpendicularibus, dicantur arcus $CB = p$; radius $AC = r$; recta $AP = f$; $AM = k$. Estque jam C A arc. C B :: N R. arc. F E. hoc est, $r . p :: a . \frac{pa}{r} =$ arc. F E. & A M . M P :: A E . E K; hoc est, $k . m :: r . \frac{rm}{k} = EK$; item A E . E K :: arc. F E . L K. hoc est $r . \frac{rm}{k} :: \frac{pa}{r} . \frac{pma}{rk} = LK$. Verùm A M . A E :: A P . A K; hoc est $k . r :: f . \frac{rf}{k} = AK$. ergò $\frac{rf}{k} - \frac{pma}{rk} = AL$. Et $\frac{rrff}{kk} - \frac{2fmpa}{kk}$ (abjectis superfluis) $= ALq$; adeóque $LFq = \frac{rrkk - rrff + 2fmpa}{kk} = \frac{rrmm + 2fmpa}{kk}$.

Est autem AQq . QNq :: ALq . LFq; hoc est $Q : f - e$. $Q : m + a$ :: ALq . LFq. hoc est $ff - 2fe . mm + 2ma :: rrff - 2fmpa . rrmm + 2fmpa$. Unde (sublatis ex norma rejectaneis) emerget *æquatio*, $ffpa + mmpa - rrfa = rrme$; seu $kkpa - rrfa = rrme$; vel substituendo juxta *præscriptum*; $kkpm - rrfm = rrmt$; vel $\frac{kkp}{rr} - f = t$. Hinc colligitur esse rectam $AT = \frac{kk}{rr}p$; hoc est (quoniam, ut notum est, $AV = \frac{rr}{p}$) erit $AT = \frac{AMq}{AV}$; seu, AV . AM :: AM . AT.

Exemp. V.

Fig. 120, 121. Sit D E B *Quadrans Circuli*, quem tangat recta B X; tum linea A M O talis, ut in recta A V utcunque sumptâ A P, quæ arcum B E adæquet, erectâque P M ad A V normali, sit P M æqualis arcûs B E tangenti B G.

Sumpto arcu B F = A Q; & ductâ C F H; demissis E K, F L ad C B normalibus; nominentur C B $= r$. C K $= f$: K E $= g$. Et quoniam est C E . E K :: arc. B F . L K; vel C E . E K :: Q F . L K; hoc est $r . g :: e . \frac{ge}{r} =$ L K; erit C L $= f + \frac{ge}{r}$. Et L F $= \sqrt{rr - ff - \frac{2fge}{r}} = \sqrt{gg - \frac{2fge}{r}}$.

Est autem C L . L F :: (C B . B H ::) C B . Q N . hoc est, $f + \frac{ge}{r} . \sqrt{gg - \frac{2fge}{r}} :: r . m - a$. vel (quadrando) $ff + \frac{2fge}{r} . gg - \frac{2fge}{r} :: rr . mm - 2ma$. Unde (dimissis quæ oportet) obtinetur æquatio, $rfma = grre + gmme$. unde substituendo, est $rfmm = grrt + gmmt$. vel $\frac{rfmm}{grr + gmm} = t$. seu (quoniam est $m = \frac{rg}{f}$) erit $t = \frac{rr}{rr + mm} m = \frac{CBq}{CGq}$ BG $=$ $\frac{CKq}{CEq}$ B G.

Hæc sufficere videntur huic methodo elucidandæ.

LECT. XI.

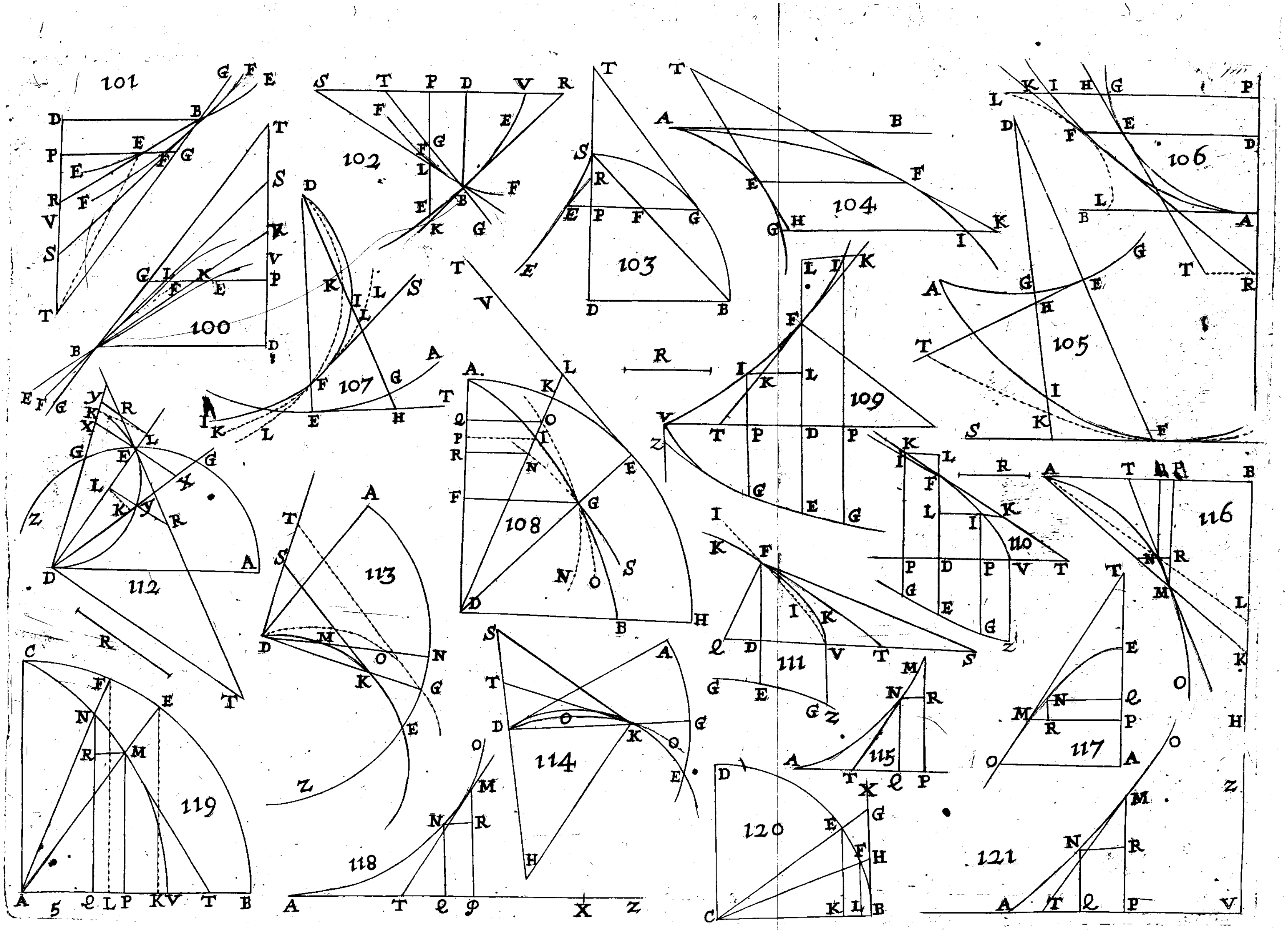
inum
siones
utiq;

I V D
mpto
Z ad
tium

Fig. 122.

D in-
B Z,
uibus
itur;
; li-
simile
o re-
D H
nstra
mila-
B A ×
angu-
K I ×
d iti-
· A V

isdem



100
101
102
103
104
105
106
107
108
109
110
111
112
113
114
115
116
117
118
119
120
121