LOGARITHMO-TECHNIA:

SIVE

Methodus construendi

LOGARITHMOS

Nova, accurata, & facilis;

SCRIPTO

Antehàc Communicata, Anno Sc. 1667.

Nonis *Augusti*: Cui nunc accedit.

Vera Quadratura Hyperbolæ,

&

Inventio *Summæ* Logarithmorum.

AUCTORE *NICOLAO MERCATORE*

Holsato, è Societate Regia.

HUIC ETIAM JUNGITUR

MICHAELIS ANGELI RICCII Exercitatio

Geometrica de Maximis & Minimis; hîc ob Argumenti

præstantiam & Exemplarium raritatem recusa. 2.

LONDINI,

Typis *Guilielmi Godbid*, & Impensis *Mosis Pitt* Bibliopolæ, in

vico vulgò vocato *Little Britain*. Anno M. DC. LXVIII.

CANDIDIS atque *INGENUIS*

MATHEMATUM

CULTORIBUS

Opellam hanc lubens meritóque

DEDICAT

AUTHOR.

LOGARITHMOTECHNIA.

LOGARITHMUS composito vocabulo dicitur à ratione & numero, quasi rationum numerus; id quod planè cum re consentit. Est enim Logarithmus nihil aliud, quàm numerus ratiuncularum, contentarum in ratione, quam absolutus quisque ad unitatem obtinet. In qua definitione rationes accipimus, tanquam magnitudines partibus constantes homogeneis toti; strictiori aliquantò notione, quàm vulgò solet. Quamvis enim ratum sit, rationem omnem ex comparatione quantitatum homogenearum oriri: certè nec quævis comparatio producit rationem; nec quarumvis quantitatum, homogenearum licèt, habitudo est ratio quanta, seu partibus constans. Nam æqualitatis, quæ dicitur, ratio, est illa quidem quantitatum homogenearum, atque æqualium, habitudo mutua, unde nec rationis appellatione privandam autumem, cui definitio *Euclidéa* competit non minùs ac aliis rationibus, quas inæqualitatis vocant: sed nihil obstat, quò minùs generalem istam rationis notionem porrò dividamus ita, ut quantitatem habere putentur solæ rationes, ex inæqualium habitudine ortæ; at æqualitatis ratio in indivisibili consistat, habeatque se in rationibus, quemadmodum punctum in magnitudinibus, aut nullitas in numeris, quæ singula quantitate ac partibus carent. Componas enim sexcentas rationes æqualitatis, non augetur nec minuitur ratio, sed eadem manet æqualitas: secùs atque in rationibus inæqualitatis, quæ additæ vel detractæ invicem, faciunt rationem majorem vel minorem. Quantum autem est, quod additis vel demtis partibus homogeneis augetur minuiturve. Sed nec quævis comparatio quantitatum homogenearum rationem producit. Veluti cùm numerum dividimus per numerum; comparantur utique quantitates homogeneæ, spectando quoties altera contineatur in altera; sed quod inde oritur latus, nec ratio est ipsorum numerorum, nec sanè quantitatem exprimit rationis, quæ utrisque intercedit. Alioquin diviso numero quovis per æqualem, quæ inde oritur unitas, exprimeret quantitatem rationis æqualium, quam tamen quantitate carere suprà adstruximus. Quinimò, datis pluribus rationibus, *v. gr.* 4 *ad* 2, & 9 *ad* 3, si diviso utriusque antecedente per ſuum conſequentem, exhiberent orti 2 & 3 veram quantitatem iſtarum rationum; oporteret, ut ex his ortis compoſitus numerus, nimirum 5, exhiberet quoque veram quantitatem rationis compoſitæ. Atqui ratio compoſita eſt 36 *ad* 6, cujus quantitatem jam exprimeret ortus 6, diverſus ſanè ab iſto 5. Obtinuit tamen uſus, ut rationes denominentur à latere orto; ſic ratio 4 ad 2 dicitur dupla, & 9 ad 3 tripla: verùm hæc nomina arbitrio hominum impoſita; retineri quidem poſſunt, veritati autem derogare nullo modo debent. Quanquam nec utilitate caret iſte modus denominandi rationes; ſiquidem arguit, rationes eſſe majores, quarum denominator eſt major, & contrà: eodem modo ſinus majores congruunt majoribus arcubus, quorùm tamen veram quantitatem exprimere nemini videntur. Cœterùm, ut linea eſt dupla lineæ, quam bis continet; ita, propriè loquendo, dupla foret ratio alterius rationis, quam bis continet; ſed pro eo duplicatam dicere maluerunt Scriptores, quorum arbitrio ſynonyma alioquin vocabula *dupli & duplicati*, res planè diverſas ſignificare intelliguntur. Verùm id quod eſt multò maximum; nimirum omnium quantitatum menſuram eſſe quantitatem homogeneam, & in diviſione genuina fieri applicationem menſuræ homogeneæ ad quantitatem menſurandam, ortum vero ex tali applicatione, nihil aliud eſſe, quàm numerum Arithmeticum, exprimentem, quoties menſura continetur in menſurato; hoc ſcilicet eſt, quod omnem dubitationem excludit. Ita falluntur profectò, qui applicatâ lineâ rectâ illatabili ad aream datam, putant inveniri latitudinem rectanguli; quaſi non potiùs ſecundum veras diviſionis leges applicaretur rectangulum æquè longum diviſori, & æquè latum unitati aſſumtæ, ad aream extenſam quoque ad longitudinem diviſoris; & quaſi non ortus ex iſta applicatione, numerus eſſet Arithmeticus, exprimens, quoties rectangulum menſurans contineatur in menſurato, vel (cùm per 1. VI eadem ſit ratio) quoties latitudo rectanguli applicati contineatur in latitudine rectanguli menſurati; quò ſcilicet diviſio verè opponatur multiplicationi, quæ reſolvat hujus productum in ſua elementa. Quemadmodum enim omnis multiplicator eſt numerus Arithmeticus (ut habet *Stevinus* in Arithmetica Practica;) ita omnis ortus à diviſione eſt ſimiliter numerus Arithmeticus. Quæ quidem omnia facillimè præſenti negotio aptantur. Nam multiplicare rationem nihil eſt aliud, quàm replicare aliquam rationem toties, quot ſunt unitates in numero aliquo Arithmetico, qui dicitur factor. Et dividere rationem, eſt applicare rationem aliquam ad aliam rationem, ut inveniatur numerus Arithmeticus, exprimens, quoties menſurans ratio contineatur in menſurata. Id ſi hîc fieret, nihil dubium, quin vera pateſieret rationis quantitas. At enimverò, cùm applicatur terminus alicujus rationis ad alterum, num putamus rationem applicari

plicari

plicari ad rationem? quo pacto igitur ortus ex tali applicatione poteſt exprimere quantitatem datæ rationis? Verum eſt quidem, quòd ortus ex applicatione termini ad terminum, rationem habet ad unitatem eandem, quam dividuus ad diviſorem; ſed hoc modo eadem prodit ratio, quæ ante diviſionem fuerat, aliis tantùm terminis expreſſa; nec proinde quantitas rationis datæ invenitur in menſura aliqua priùs nota, quemadmodum in aliis magnitudinibus diviſis aſſolet, & inſtituti noſtri ratio poſtulat: Siquidem tum demum quantitatem rationum exactè determinâſſe videbimur, cùm eas omnes in una aliqua ac eâdem communi menſurâ æſtimare noverimus; id quod Logarithmorum ope præſtari, definitione modò traditâ innuere volui. Ex qua porro intelligitur, cùm ſinguli Logarithmi numerent particulas rationum inde ab unitate ad ſingulos ordine abſolutos procedendo coacervatarum; fieri non poſſe, quin æqualibus Logarithmorum differentiis (id eſt, æqualibus particularum incrementis) congruant quoque æquales rationes abſolutis intercedentes (cùm integra ex æquali numero particularum æqualium conflata, inter ſe ſint æqualia;) adeóque Logarithmos eſſe in proportione Arithmetica, cùm eorum abſoluti ſunt in Geometrica; idcircò poſſe operationem Regulæ proportionum in compendium redigi, ſubſtitutâ additione & ſubtractione loco multiplicationis & diviſionis: Denique rationis cujuſque bipartitionem, tripartitionem, *&c.* quæ alioquin requireret extractionem radicis quadratæ, cubicæ, *&c.* conſiſtere in bipartitione, tripartitione, *&c.* differentiæ Logarithmorum datis terminis congruentium (hoc eſt, ratiuncularum in ratione data comprehenſarum.) Qui uſus cùm ſit eximius; patet poſtremò, quo pacto tam utiles numeri artificiales, ſeu Logarithmi concinnari poſſint; nimirum inveſtigando, quot ratiunculæ, aſſumtæ magnitudinis, contineantur in ratione cujuſque abſoluti ad *unitatem*. Sic enim unitatis Logarithmus evadit 0, cum unitatis ad unitatem ratio ſit æqualitatis, quam quantitate carere ſupra aſſerui. Ita nimirum fiet, ut cùm inter multiplicandum vel dividendum unitas nihil mutet; hujus Logarithmus 0 (dum additio & ſubtractio ſubſtituuntur multiplicationi & diviſioni) nihil quoque additione vel ſubtractione ſui mutet. Numerus autem ratiuncularum in ratione decupla contentarum commodiſſimè aſſumitur 1,0000000 (hoc eſt, una decupla ratio in numerum partium decimalium rotundum diſtributa.) Ita enim fiet, dum inter unitatem & 10 intercedit una ratio decupla, & porro inter 10 & 100 altera, inter 100 & 1000 tertia, & deinceps; ut in centupla eadem ratione contineantur ratiunculæ 2,0000000 (hoc eſt, duæ decuplæ rationes in numerum partium rotundum diſtributæ) in millecupla vero ratione contineantur 3,0000000 (hoc eſt, tres rationes decuplæ in numerum par-

tium

tium rotundum distributæ;) & deinceps. Unde primùm hoc commodi consequimur, ut absolutis, iisdem characteribus expressis, iidem competant Logarithmi; veluti si absoluto 2 competat Logarithmus 0,3010299; etiam absolutis 20, 200, 2000 competent Logarithmi 1,3010299; 2,3010299; 3,3010299. Etenim si rationes 2 ad 1, 20 ad 1, 200 ad 1, & deinceps, intelligantur partitæ, illa quidem in rationes 2 ad 1 & 1 ad 1; ista in 20 ad 10, & 10 ad 1; hæc in 200 ad 100, & 100 ad 1; apparet, quòd excessus 2 ad 1, quo illa superat rationem 1 ad 1 æqualis sit excessui 20 ad 10, quo ista superat rationem 10 ad 1, idemque æqualis excessui 200 ad 100, quo hæc superat rationem 100 ad 1. Ergo si ratio 2 ad 1 præter æqualitatis rationem (quam innuit characteristica 0) contineat ratiunculas 3010299, qualium ipsa decupla continet 1,0000000; certè ratio 20 ad 1 præter unam decuplam (quam innuit characteristica 1) continebit eundem numerum ratiuncularum excurrentium 3010299; & ratio 200 ad 1 præter duas decuplas (quas innuit characteristica 2) continebit similiter eundem numerum ratiuncularum excurrentium 3010299. Unde porrò & hoc consequimur, ut ex inspecta characteristica, uniuscujusque absoluti valorem æstimare queamus. Nam cùm in decupla contineantur 1,0000000 ratiunculæ numero rotundo, & in centupla 2,0000000 ratiunculæ numero itidem rotundo; oportet, ut quæcunque sunt inter decuplam & centuplam contineant plus quàm unam decuplam, minus autem quam duas; quamobrem characteristica omnium absolutorum, qui sunt inter 10 & 100, ipsiusque adeò denarii (hoc est, omnium numerorum, qui scribuntur duobus characteribus) erit 1; & sic deinceps.

His ita ordinatis, proximum est, ut ostendamus, quomodo inveniatur mensura rationis, quam quisque absolutus obtinet ad unitatem, in partibus, qualium decupla continet 1,0000000 (hoc est, quomodo cujusque absoluti Logarithmus investigandus sit.) Verbi gratiâ: Scire velim, ratio 100[5 ad 1 quot contineat ratiunculas, qualium decupla continet 1,0000000. Dispesco igitur rationem datam 100[5 ad 1 in suas partes, nimirum 100[5 ad 100, 100 ad 10, & 10 ad 1, quarum posteriores duæ constituunt duas decuplas (unde patet Characteristicam fore 2;) itaque restat, ut investigemus, quota pars sit reliqua ista ratio 100[5 ad 100 ipsius decuplæ. Quod si igitur termini 100[5 & 100 ducantur uterque in sese, producti exhibebunt rationem duplicatam rationis 100[5 ad 100, cujus (duplicatæ sc. rationis) termini rursus in se ducti procreabunt duplicatam duplicatæ, id est, quadruplicatam rationis 100[5 ad 100; atque ita continuatâ multiplicatione terminorum, donec is, qui gignitur ex ductu continuo termini 100[5 in seipsum, evadat decuplus ejus, quem ductus continuus

tinuus termini 100 in seipsum producit; denominator potestatis postremò genitæ ostendet, quot integris vicibus ratio 100[5 ad 100 contineatur in decupla. Et cùm alter terminorum sit 100, cujus potestates omnes constant unitate & certo numero cyphrarum; omnis labor reliquus occupabitur circa elevandum alterum terminum 100[5 ad eam potestatem, quæ prioris termini (nimirum 100rij) æquè altam potestatem excedat decuplo; cujus operationis compendium exemplo, quam verbis docere præstat.

100[5000 (1)
5001 (1)

1005000
5025

1010025 (2)
5200101 (2)

1010025
10100
20
5

1020150 (4)
0510201 (4)

1020150
20403
102
51

1040706 (8)
6070401 (8)

1083068 (16)
8603801 (16)

1173035 (32)
5303711 (32)

1376011 (64)
1106731 (64)

1893406 (128)

1893406 (128)
6043981 (128)

3584985 (256)
5894853 (256)

12852116 (512)

Hæc potestas plusquam decuplo excedit potestatem æquè altam 100rij; ergo resumo 256tam, eamq; duco, non in sese, ut modò, sed in proximè præcedentem, nimirum 128vam, hoc modo:

3584985 (256)
6043981 (128)

6787831 (384)
1106731 (64)

9340130 (448)
5303711 (32)

10956299 (480)

Hæc potestas denuò excedit æquè altam 100rij plusquam decuplo; ergo eandem 448vam duco, non in 32dam, ut modò, sed in proximè præcedentem, hoc modo:

9340130 (448)
8603801 (16)

10115994 (464)

Ubi rursus nimium colligitur; ergo eandem adhuc 448vam duco, non in 16tam, ut modò, sed in proximè præcedentem, nimirum 8vam, hoc modo:

9340130 (448)
6070401 (8)

9720329 (456)
0510201 (4)

9916193 (460)
5200101 (2)

10015603 (462)

Quæ potestas rursus excedit limitem; quare eandem 460mam duco, non in 2dam, sed in 1mam, hoc modo:

9916193 (460)
5001 (1)

9965774 (461)

Cùm

Cùm igitur 462da poteſtas termini 100[5 excedat æquè altam 100rij plus quam decuplo, at 461ma ejuſdem termini 100[5 excedat æquè altam 100rij minùs quàm decuplo: ajo, rationem 100[5 ad 100 contineri in decupla plus quam 461 vicibus, minùs autem quàm 462bus.

Cœterùm

Cùm poteſtas	460	fit	9916193	& differentiæ
	461		9965774	49581 propemodum
	462		10015603	49829 æquales;

Itaque partem proportionalem, quâ poteſtas juſta, nimirum 10000000 excedit proximè minorem 9965774, per Regulam auream facilè ac tutò reperire datur, ſumendo nimirùm,

juſtæ	10000000
& proximè minoris	9965774
differentiam	34226, & dicendo:

Ut differentia inter proximè minorem & majorem (nimirum 49829)

Ad differentiam inter proximè minorem & juſtam (putà 34226;)

Ita 10000, ad 6868; quæ ſunt partes decimales unius vicis, adeò ut ratio 100[5 ad 100 contineatur in decupla 461[6868 vicibus. Porrò, Si decupla (ſive ratio 100[5 ad 100 ſumta 461[6868 vicibus) continet ratiunculas 1,0000000; quot ejuſmodi ratiunculas continebit ratio 100[5 ad 100 ſemel ſumta? Prodeunt 21659[7 ratiunculæ, quæ ſunt exacta menſura rationis 100[5 ad 100, quibus ſi addas rationes 100 ad 10, & 10 ad 1, hoc eſt bis decuplam, conſtantem ratiunculis 2,0000000, fit integra menſura rationis 100[5 ad 1 (ſive Logarithmus abſoluti 100[5) hic ſcilicet 2,0021659[7.

Pari modo invenietur Logarithmus abſoluti 99[5, vel ratio abſoluti 99[5 ad 1, ſi ex ratione 100 ad 1 (quæ æquipollet bis decuplæ) auferas rationem 100 ad 99[5; hoc eſt, ex ratiunculis 2,0000000 auferas numerum ſimilium ratiuncularum in ratione 100 ad 99[5 contentarum. Quæratur igitur primùm, quoties ratio 100 ad 99[5 contineatur in decupla. Ubi rurſus alter terminorum cùm ſit 100, operationis haut indiget, alter verò 99[5 continuo ductu in ſeipſum elevandus eſt ad eam poteſtatem, quæ decuplo minor ſit poteſtate 100rij æquè altâ. En operationem:

995000 (1)
599 (1)

8955000
895500
49750

9900250 (2)
520099 (2)

8910225
891023
198
49

9801495 (4)
5941089 (4)

8321345
784120
980
392
88

9606930 (8)
396069 (8)

9229310 (16)
139229 (16)

8518016 (32)

8518016 (32)
6108158 (32)

7255660 (64)
665527 (64)

5264459 (128)
9544625 (128)

2771452 (256)
2541772 (256)

554290 (512)

Hæc poteſtas pluſquam decuplo minor eſt poteſtate 100rij æquè altâ; ergo reſume

2771452 (256)
9544625 (128)

1459018 (384)
665527 (64)

1058613 (448)
6108158 (32)

901728 (480)

Quæ poteſtas rurſus plusquam decuplo minor eſt poteſtate 100rij æquè altâ, ergo reſume

1058613 (448)
139229 (16)

977026 (464)

Quæ etiam pluſquam decuplo minor eſt poteſtate 100rij æquè alta; ergo reſume

1058613 (448)
396069 (8)

1017002 (456)
5941089 (4)

996814 (460)

Hæc quoque pluſquam decuplo minor eſt poteſtate 100rij æquè altâ; ergo reſume

1017002 (456)
520099 (2)

1006857 (458)
599 (1)

1001823 (459)

Cùm igitur 460ma poteſtas termini 99[5 deficiat ab æquè altâ 100rii pluſquam decuplo; at 459na ejuſdem termini 99[5 deficiat ab æquè altâ 100rij minùs quàm decuplo; ajo, rationem 100 ad 99[5 contineri in decupla pluſquam 459 vicibus, minùs autem quàm 460.

Tum, Ut differentia poteſtatum 459næ & 460mæ (nimirum 5009) ad differentiam 459næ & juſtæ (putà 1823:) Ita 10000, ad 3639. Quare ratio 100 ad 99[5 continetur in decupla 459[3639 vicibus.

Porrò

Porrò, Si decupla (sive ratio 100 ad 99[5 sumta 459[3639 vicibus) continet ratiunculas 1,0000000; quot ejusmodi ratiunculas continebit ratio 100 ad 99[5 semel sumta. Prodeunt 21769[3 ratiunculæ, quæ sunt exacta mensura rationis 100 ad 99[5, quâ scilicet ratio 99[5 ad 1 deficit à ratione 100 ad 1, hoc est, à bis decuplâ, quæ cùm constet ratiunculis 2,0000000, demtis hinc 21769[3, restat mensura rationis 99[5 ad 1, hæc scilicet 1,9978230[7, qui proinde est Log-us absoluti 99[5.

Atque hoc modo æstimatis rationum quantitatibus in communi quadam mensura, non solùm natura & usus Logarithmorum clarius elucescit; sed & constructio eorundem multò facilior evadit. Id quod magis perspicuum fiet, cùm ostendero alterum etiam longè promtiorem modum rationes æstimandi. Sed amolienda est prius difficultas, quæ, haut scio, an cuiquam detecta, plures utique in errorem induxit. Cùm enim ratio duobus terminis intercedens vulgò haut aliter consideretur, quàm accipiendo alterutrum terminum ut antecedentem, & alterum ut consequentem; unde cùm ratio est quanta (hoc est, cùm termini sunt inæquales) vel major terminus est antecedens, & dicitur ratio majoris inæqualitatis, vel minor est antecedens, & dicitur ratio minoris inæqualitatis: Ajo ego, eandem rationem iisdem terminis conceptam posse ac debere (saltem in Musicis, atque in hac nostra Logarithmotechnia) alio etiamnum modo considerari ita, ut neuter terminorum existimetur tanquam antecedens, vel consequens, sed uterque capiatur simul pariter tempore atque ordine. Sic *v. gr.* in Musicis intervallum diapente, sive ratio $\frac{3}{2}$ vel $\frac{2}{3}$, potest quidem accipi ita, ut numerus undationum ab acutiori phthongo in aere excitatarum, nempe ternarius, sit antecedens, & binarius, exhibens numerum undationum pari temporis spatio â graviori phthongo effectarum, sit consequens, dum intelligatur acutior phthongus tempore (vel saltim cogitatione) præcedere graviorem; & vice versâ: sed nihil vetat, quò minùs etiam ambo isti phthongi simul atque eodem tempore consonent, adeóque neuter altero sit vel tempore vel naturâ prior. Cœterùm nihilo majus ob hoc vel minus evadit intervallum diapente (ratione sesquialterâ constans) sive acutior phthongus præcedat graviorem, sive contrà, seu denique ambo simul consonent. Ita, licèt utilis sit demonstrationibus Geometricis consideratio vulgaris, quâ minor terminus antecedens ad majorem consequentem dicitur minorem rationem habere, quàm idem ille major tanquam antecedens ad eundem minorem tanquam consequentem obtineat: Negari tamen haut potest, eundem numerum ratiuncularum contineri in sesquialtera ratione, sive ternarius sit antecedens, sive binarius, sive neuter; adeóque considerationem antecedentis & consequentis in æstimanda mole vel mensura rationum nullum instar habere. Non

Non secùs ac quinarius negatus (—5) mole haud differt à quinario affirmato (+5) cùm uterque constet quinque unitatibus; dissimulatâ nimirum affectione, propter quam negatus vel affirmatus censetur, & solâ mole vel quantitate simpliciter æstimatâ: cùm tamen accipiendo quinarium negatum, prout signo negationis affectus est, verum sit, eum minorem esse, non modò quovis numero affirmato, sed & omni negato, qui à nihilo minùs differat, quàm ipse, quales sunt binarius vel ternarius negatus (—2, vel—3.) Ubi præter molem numeri consideratur quoque, utram in partem eadem abeat à nihilo, affirmatam an negatam. Ita quoque sive unisonum (vel æqualitatis rationem, quæ quantitate caret, atque ideò rectè componitur nihilo) ponas in phthongo graviori (vel in binario) indéque ascendas ad phthongum invervallo diapente acutiorem (vel ad ternarium;) sive contrà ponas unisonum in acutiori (vel æqualitatis rationem in ternario) indeque descendas ad phthongum intervallo diapente graviorem (vel ad binarium:) certè eadem est utrobique quantitas intervalli Musici (atque idem numerus ratiuncularum intercedentium) licèt ab unisono (vel ab æqualitatis ratione, tanquam nihilo) in diversas planè partes abeat. Unde si moles sola, aut quantitas rationis æstimetur, dissimulando utram in partem (majorisne, an minoris inæqualitatis) vergat ab æqualitate; nihilo major est ratio ternarii ad binarium, quàm binarii ad ternarium. Sed si cum mole unà includas quoq; considerationem processûs à majori termino ad minorem, vel contrà, non eo inficias, minorem esse quamvis rationem minoris inæqualitatis non modò quâvis ratione majoris inæqualitatis; sed & quâvis aliâ minoris inæqualitatis, quæ ab æqualitate minùs absit. Ita ratio antecedentis 5 ad consequentem 8, non modò minor est ratione antecedentis 8 ad consequentem 6 (vel 5) sed eádem quoque minor est ratione antecedentis 6 (vel 7) ad consequentem 8; licèt sepositâ vel neglectâ notione antecedentis & consequentis, eadem sit moles rationis $\frac{5}{8}$ atque $\frac{8}{5}$. Distinguemus igitur deinceps inter quantitates mole-majores, & affectione-majores: ita ut in rationibus notio inæqualitatis majoris vel minoris nîl nisi affectionem innuat. Eas porrò rationes appellamus mole-majores, quarum major terminus divisus per minorem, dat quotum majorem; & vice versâ. Præterea majoris inæqualitatis rationum quæcunque mole, eædem & affectione majores sunt; at minoris inæqualitatis rationes quò sunt mole majores, eò affectione minores sunt. Quibus præmissis, digeremus ea, quæ restant, in propositiones.

PROPOSITIO I.

Si duæ quantitates ejuſdem affectionis auferantur ab invicem (affirmata ſc. ab affirmata, vel negata à negata) ſitque quantitas reliqua ejuſdem affectionis cum duabus ab initio datis; quantitas ablata mole-minor eſt quantitate ex qua auferebatur. Sin quantitas reliqua diverſæ ſit affectionis à duabus initiò datis; quantitas ablata mole-major eſt quantitate ex qua auferebatur. Sit exempli gr.

ratio ſubducenda	ratio ex qua	ratio reliqua	
$\frac{5}{8}$)	$\frac{3}{5}$	($\frac{24}{25}$	} tres ſcilicet ratio-

nes ejuſdem affectionis, putà minoris inæqualitatis ſingulæ; ergo, inquam, ratio ſubducta $\frac{5}{8}$ mole-minor eſt ratione ex quâ $\frac{3}{5}$. Sit rurſus

ratio ſubducenda	ratio ex qua	ratio reliqua	
$\frac{8}{5}$)	$\frac{3}{2}$	($\frac{15}{16}$	} quarum priores

duæ ſunt ejuſdem affectionis, nimirum majoris inæqualitatis ambæ, at tertia $\frac{15}{16}$ diverſæ eſt affectionis, putà inæqualitatis minoris; ergo, inquam, ratio ſubducta $\frac{8}{5}$ mole-major eſt ratione ex quâ $\frac{3}{2}$.

PROPOSITIO II.

Si ſint quotcunque rationes continuæ & terminorum æquidifferentium; v. gr. $\frac{a}{a+b}$, $\frac{a+b}{a+2b}$, $\frac{a+2b}{a+3b}$, & deinceps, faciendo ſcilicet antecedentem cujuſque ex poſterioribus rationibus æqualem conſequenti proximè præcedentis, & à minoribus progrediendo ad majores: Erit quælibet præcedentium rationum mole-major qualibet ſequente; ſed & differentiarum inter ipſas rationes tam primarum, quàm ſecundarum, tertiarum, cæterarumque adeò omnium in infinitum, ſemper præcedens mole-major eſt ſequente. Sin à majoribus terminis progrediare ad minores; contrarium eveniet.

Patet ex collatione ſequentis tabellæ cum propoſitione prima.

Rationes.

Rationes.	Diff. primæ.	Differentiæ ſecundæ.
a		
$a+b$		
	$aa+2ab+bb$	
	$aa+2ab$	
$a+b$		$a^4+6a^3b+12aabb+8ab^3$
$a+2b$		$a^4+6a^3b+12aabb+10ab^3+3b^4$
	$aa+4ab+4bb$	
	$aa+4ab+3bb$	
$a+2b$		$a^4+10a^3b+36aabb+54ab^3+27b^4$
$a+3b$		$a^4+10a^3b+36aabb+56ab^3+32b^4$
	$aa+6ab+9bb$	
	$aa+6ab+8bb$	
$a+3b$		$a^4+14a^3b+72aabb+\overset{160}{\cancel{56}}ab^3+128b^4$
$a+4b$		$a^4+14a^3b+72aabb+162ab^3+135b^4$
	$aa+8ab+16bb$	
	$aa+8ab+15bb$	
$a+4b$		
$a+5b$		

Propoſitio III.

Si quotcunque rationum continuarum, quarum termini ſint æquidifferentes, prima eademque minima vocetur a, differentia autem primæ & ſecundæ rationis vocetur b, tum ex differentiis ſecundis prima vocetur c; atque ex tertiis prima vocetur d, & ſic porrò: Aio ſecundam rationem fore $a+b$, tertiam $a+2b+c$, quartam $a+3b+3c+d$ quintam $a+4b+6c+4d+e$, atque ita deinceps, componendo ſingulas rationes ex prima & tot differentiis, quot quæque locis abeſt à prima, ipſis autem differentiis jungendo coëfficientes numeros figuratos, primis quidem radices, ſecundis trigonales, tertiis pyramidales, atque ita porrò, ſingulos que adeò, prout naturali ſerie ordinantur in ſubjecta Tabella:

 Unitates

Unitates.	radices.	trigonales.	pyramidales.	trigono-trigonales.	trigono-pyramidales.	pyramidi-pyramidales.	trigono-trigono-pyramid.	trigono-pyramidi-pyramid.	pyramidi-pyramidi-pyramida.
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	3	6	10	15	21	28	36	45	
1	4	10	20	35	56	84	120		
1	5	15	35	70	126	210			
1	6	21	56	126	252				
1	7	28	84	210					
1	8	36	120						
1	9	45							
1	10								

Nimirum eodem modo, quo iidem figurati numerant complementa potestatum à radice binomia genitarum; observato ascensu obliquo à sinistra dextrorsum.

Sic undecima ratio constat ex $a+10b+45c+120d+210e+252f+210g+120h+45i+10k+l$; sumtis ordine numeris imam tabellæ basin occupantibus.

Exhibet

Exhibet autem tabella non modò quotam velis rationem, sed & summam quotcunque continuè sequentium, pari fermè negotio methodoque. Sic summa quinque rationum est $5a+10b+10c+5d+e$, observato ascensu obliquo, ut antè.

Demonstratio.

Rationes.	diff: primæ.	Secundæ.	Tertiæ.	4
a				
	b			
$a+b$		c		
	$b+c$		d	
$a+2b+c$		$c+d$		e
	$b+2c+d$		$d+e$	
$a+3b+3c+d$		$c+2d+e$		
	$b+3c+3d+e$			
$a+4b+6c+4d+e$				

Cùm enim per præcedentem, progrediendo à majoribus terminis ad minores (vel quod idem est, à minoribus rationibus ad majores) non modò secunda ratio excedat primam, sed & primarum, secundarum, cæterarumque differentiarum secunda quæque excedat primam; licebit sanè istos excessus vocare b, c, d, & deinceps.

Cùm a. differentiarum tertiarum prima sit d } Ex hypothesi;
Et quartarum prima (quâ secunda tertiarum excedit primam) e }
Erit sanè secunda tertiarum $d+e$
Rursus cùm secundarum differentiarum prima sit c } Ex hypothesi;
Et tertiarum prima (quâ altera secundarum excedit primam) d }
Erit sanè altera secundarum $c+d$
Sed 2da 3tiarum (quâ tertia secundarum excedit alteram) erat $d+e$
Ergo tertia secundarum erit $c+2d+e$
Porrò cùm primarum differentiarum prima sit b } Ex hypothesi;
Et secundarum prima (quâ secunda primarum excedit primã) c }
Erit sanè secunda primarum $b+c$
Sed altera secundarum (quâ tertia primarum excedit 2dam) erat $c+d$
Ergo tertia primarum $b+2c+d$
Sed & 3tia 2darum (quâ quarta primarum excedit 3tiam) erat $c+2d+e$
Ergo quarta primarum erit $b+3c+3d+e$
Denique cùm prima ratio sit a } Ex hypothesi;
Et differentia inter primam & secundam rationem b }
Erit sanè secunda ratio $a+b$
Et cùm differentiarum primarum secunda foret $b+c$
Erit tertia ratio $a+2b+c$

Sed

Sed & differentiarum primarum tertia erat	$b+2c+d$
Ergo quarta ratio	$a+3b+3c+d$
Tandem differentiarum primarum quarta erat	$b+3c+3d+e$
Ergo quinta ratio	$a+4b+6c+4d+e$

$$\text{Postremò rationes}\left\{\begin{array}{ll}\text{Prima} & a\\ \text{Secunda} & a+b\\ \text{Tertia} & a+2b+c\\ \text{Quarta} & a+3b+3c+d\\ \text{Quinta} & a+4b+6c+4d+e\end{array}\right\}\text{addantur,}$$

fit summa quinque rationum $5a+10b+10c+5d+e$.

Rationes vel magnitudines.

Prima	a
2	$a+b$
3	$a+2b+c$
4	$a+3b+2c+d$
5	$a+4b+6c+4d+e$
6	$a+5b+10c+10d+5e+f$
7	$a+6b+15c+20d+15e+6f+g$
8	$a+7b+21c+35d+35e+21f+7g+h$
9	$a+8b+28c+56d+70e+56f+28g+8h+i$
10	$a+9b+36c+84d+126e+126f+84g+36h+9i+k$

Propositio IV.

Si quotcunque rationum continuarum, quarum termini sint æquidifferentes, prima eademque maxima vocetur a, differentia autem primæ & secundæ vocetur b, tum differentiarum secundarum prima vocetur c, tertiarum prima d, & sic deinceps; Aio secundam rationem fore $a-b$, tertiam $a-2b+c$, quartam $a-3b+3c-d$, quintam $a-4b+6c-4d+e$; atque ita deinceps, alternatis semper signis affirmatis & negatis. Demonstratur ut præcedens.

Propositio V.

Datæ rationis multiplicem invenire prope verum.

Constructio. Differentiam terminorum datæ rationis duc in denominatorem multiplicis dati, & à facto aufer ipsam differentiam, reliqui semissem adde termino majori, & detrahe minori, ita prodibunt duo termini exprimentes rationem paulò minorem quæsitâ. Tum si termini prodeuntes sint

sint forte numeri mixti ex integris & fractis; reducantur ad purè fractos, quorum denominatoribus omissis, ratio quæsita censebitur in numeratoribus integris & à fractione liberis. *V. gr.* Quæratur rationis $\frac{25}{28}$ quadruplum. Differentia terminorum 3 ducta in 4 exhibet 12, unde ablatis tribus restant 9, cujus semis $4\frac{1}{2}$ additus termino majori 28, facit $32\frac{1}{2}$, detractus autem minori 25, relinquit $20\frac{1}{2}$; erit igitur ratio $20\frac{1}{2}$ ad $32\frac{1}{2}$ paulò major quadruplo rationis $\frac{25}{28}$. Reductis terminis $20\frac{1}{2}$ & $32\frac{1}{2}$ ad purè fractos, fiunt $\frac{41}{2}$ & $\frac{65}{2}$, omissisque denominatoribus, erit ratio $\frac{41}{65}$ paulò major quæsitâ.

Demonstratio hujus & sequentis propositionis constabit ex propositione VII.

Propositio VI.

Datæ rationis partem imperatam invenire prope verum.

Constructio. Differentiam terminorum datæ rationis divide in partes totidem, quot denominator partis quæsitæ constat unitatibus, atque ex iis partibus exemtâ unâ, reliquarum semissem adde termino minori, & detrahe quoque majori, ita probibunt duo termini exprimentes rationem paulo minorem quæsitâ: Tum si termini prodeuntes sint fortè numeri mixti ex integris & fractis; reducantur ad purè fractos, quorum denominatoribus omissis, ratio quæsita censebitur in numeratoribus integris, & à fractione liberis. *V. gr.* Oporteat rationis $\frac{3}{5}$ invenire partem quintam. Differentia terminorum 2 divisa quinquefariam exhibet $\frac{2}{5}$, quæ est una pars quinta, eximenda ex integra summa quinque partium, quæ erat 2, & restant $\frac{8}{5}$, quarum semis $\frac{4}{5}$ additus termino minori 3, facit $3\frac{4}{5}$; detractus verò ex majori 5, reliquum facit $4\frac{1}{5}$; erit igitur ratio $3\frac{4}{5}$ ad $4\frac{1}{5}$ paulò minor, quàm pars quinta rationis $\frac{3}{5}$. Reductis terminis $3\frac{4}{5}$ & $4\frac{1}{5}$ ad purè fractos, fiunt $\frac{19}{5}$ & $\frac{21}{5}$, omissisque denominatoribus, erit ratio $\frac{19}{21}$ paulò minor quæsitâ. Rursus inveniendus sit rationis $\frac{8}{11}$ semis. Differentia terminorum 3 bipartita exhibet $1\frac{1}{2}$, qui est unus semis, eximendus ex integra summa duarum partium 3, & restat $1\frac{1}{2}$, cujus semis $\frac{3}{4}$ additus termino minori 8, facit $8\frac{3}{4}$; detractus autem ex majori 11, relinquit $10\frac{1}{4}$; erit igitur ratio $8\frac{3}{4}$ ad $10\frac{1}{4}$ paulo minor semisse rationis $\frac{8}{11}$. Reductis terminis $8\frac{3}{4}$ & $10\frac{1}{4}$ ad purè fractos, fiunt $\frac{35}{4}$ & $\frac{41}{4}$, omissisque denominatoribus, erit ratio $\frac{35}{41}$ paulò minor quæsitâ.

Propositio VII.

Invenire, quantum pars rationis imperata, quæ per præcedentem invenitur, deficiat ab exactiori.

Constructio.

Constructio. Primò, si partis imperatæ denominator sit numerus impar; sume rationes, quæ sunt rationi per præcedentem inventæ utrinque vicinæ & æquidifferentes, ita habebis tres rationes, quarum minimam aufer à media, & mediam à maxima, prodibunt duæ differentiæ, quarum differentiam denuò investigabis, tantisper asservandam. Deinde partis imperatæ denominatori unitatem detrahe, reliqui semissem in tabula Figuratorum insertâ prop. III, quære inter radices, & invento congruentem numerum trigonalem excerptum tripartire, sic invenies, quoties sumenda sit differentiarum differentia suprà asservata, ut acquiras particulam, quâ pars imperata, quæ per præcedentem inveniebatur, deficit ab exactiori. *V.gr.* Scire velim, ratio $\frac{19}{21}$ per præcedentem inventa quantum deficiat ab exactiori quinta parte rationis $\frac{3}{5}$. Rationi $\frac{19}{21}$ utrinque vicinæ & æquidifferentes sunt $\frac{17}{19}$ & $\frac{21}{23}$. Differentia minimæ à media $\frac{437}{441}$ & mediæ à maxima $\frac{357}{361}$, & harum differentiarum differentia $\frac{157437}{157757}$ asservanda. Tum partis imperatæ denominatori 5 detraho 1, restant 4, cujus semissi 2 inter radices invento congruit trigonalis numerus 3, cujus triens est 1, indicans differentiarum differentiam suprà asservatam $\frac{157437}{157757}$ semel sumtam exhibere particulam, quâ ratio $\frac{19}{21}$ deficit ab exactiori quinta parte rationis $\frac{3}{5}$, adeò ut hujus exactior pars quinta sit ratio $\frac{19}{21}$ + ratione $\frac{157437}{157757}$.

Sin partis imperatæ denominator sit numerus par; sume semissem differentiæ terminorum rationis per præcedentem inventæ, quem ejusdem termino minori detrahes, & majori addes pariter ac detrahes; ita obtinebis quatuor rationes continuas terminorum æquidifferentium, ex quibus minorum duarum differentiam auferes ex majorum duarum differentia, & emergentem differentiarum differentiam asservabis. Deinde partis imperatæ denominatorem bipartire, & invento semissi congruentes in tabella propositioni III. subjuncta species excerpe, saltim usque ad c speciem, positoque $a = \frac{1}{2}$, $b = 2$, $c = 1\frac{1}{3}$; duc cujusque speciei valorem in suum coëfficientem, collectisque omnibus in unam summam, habebis, quot vicibus sumenda sit differentiarum differentia suprà asservata, ut acquiras particulam, quâ pars imperata, quæ per præcedentem inveniebatur, deficit ab exactiori. Ex.gr. Rationis $\frac{8}{11}$ octans per præcedentem inventus sit $\frac{149}{155}$; Scire velim, quantum is deficiat ab exactiori. Differentia terminorum est 6, cujus semis 3 detractus minori termino, relinquit 146; additus autem majori, facit 158; & detractus majori, relinquit 152. Sunt ergo quatuor rationes continuæ terminorum æquidifferentium $\frac{146}{149}$, $\frac{149}{152}$, $\frac{152}{155}$, $\frac{155}{158}$. Differentia duarum minorum rationum $\frac{24016}{24025}$ ablata à differentia duarum majorum

jorum

jorum $\frac{22192}{22201}$ relinquit differentiarum differentiam $\frac{1753825}{1753879}$ asservandam. Partis imperatæ denominator est 8, cujus semissi 4 congruunt in tabella propositioni III subjuncta species istæ: $a + 3b + 3c$; sed $a = \frac{1}{2}$, & $3b = 6$, & $3c = 4$, quæ juncta faciunt $10\frac{1}{2}$. Ergo differentiarum differentiæ $\frac{1753825}{1753879}$ suprà servatæ sumendum est decuplum cum semisse, ut acquiramus particulam, quâ octans per præcedentem inventus deficit ab exactiori. Atqui rationis $\frac{1753825}{1753879}$ decuplum per V hujus est $\frac{1753582}{1754122}$ vel $\frac{876791}{877061}$, & semis per VI est $\frac{3507677}{3507731}$; adeò ut rationis $\frac{8}{11}$ octans exactior præter rationem per præcedentem inventam $\frac{149}{155}$ contineat etiamnum ratiunculas $\frac{876791}{877061}$, & $\frac{3507677}{3507731}$.

Demonstratio.

Cùm per III hujus summa trium rationum continuarum, terminis æquidifferentibus contentarum sit	$3a + 3b + c$
Erit ejusdem summæ triens	$a + b + \frac{1}{3}c$ α.
Rursus differentia primæ & secundæ rationis est	b
secundæ autem & tertiæ	$b + c$
Ergo differentiarum differentia	c
Cujus triens	$\frac{1}{3}c$
Quem si addas mediæ trium rationum	$a + b$
Erit summa	$a + b + \frac{1}{3}c$

Æqualis nempe trienti trium rationum suprà notato literâ α. Ergo discerptâ ratione quavis in tres continuas terminorum æquidifferentium, ut jubet propositio VI, erit media ex iis paulò minor triente totius discerptæ, & quidem tantò minor, quantus est triens differentiæ differentiarum intercedentium inter rationem primam & secundam, nec non inter secundam & tertiam, quod innuit propositio VII.

Sic quoque per III hujus, summa sedecim rationum continuarum, terminis æquidifferentibus contentarũ, est $16a + 120b + 560c + 1820d$

Et ejusdem summæ octans $2a + 15b + 70c + 227\frac{1}{2}d$ β

Tum

Tum per tabellam propositioni III subjunctam, quatuor mediæ ex istis sedecim, nimirum 7ma, 8va, 9na, 10ma, sunt

$$\begin{cases} a+6b+15c+20d \\ a+7b+21c+35d \\ a+8b+28c+56d \\ a+9b+36c+84d \end{cases}$$

Differentia duarum priorum $b+6c+15d$

posteriorum $b+8c+28d$

Differentiarum differentia $2c+13d$

Hujus decuplum $20c+130d$

& semis $c+6\frac{1}{2}d$

Unà cum summa duarum ex quatuor istis mediar. $2a+15b+49c+91\frac{1}{2}d$

Facit $2a+15b+70c+228d$

Æqualem octanti sedecim rationum suprà notato literâ β. Ergo si ratio data discerpatur in partes sedecim, erunt duæ mediæ ex iis simul, paulò minores octante totius discerptæ; & quidem tantò minores, quantum est differentiæ differentiarum (intercedentium inter rationes ex sedecim istis septimam & octavam, nec non inter 9nam & 10mam) decuplum cum semisse. q. e. d.

Propositio VIII.

Rationes terminorum æquidifferentium sunt propemodum, ut reciprocè ipsorum terminorum media Arithmetica.

Explicatio. Sumatur per VI hujus rationis cujusvis, v.gr. $\frac{8}{9}$ pars quævis, v.gr. semis $\frac{33}{35}$, tum pars quævis alia, v.gr. triens $\frac{25}{26}$, & ut fiant terminorum æquidifferentium, pro $\frac{8}{9}$ sumatur $\frac{16}{18}$, & pro $\frac{25}{26}$ æquipollens $\frac{50}{52}$. Medium Arithmeticum terminorum rationis totius est 17, semissis, 34, trientis 51. Liquet igitur, ut tota ratio $\frac{16}{18}$ est ad semissem suum $\frac{33}{35}$; ita reciprocè semissis medium Arithmeticum 34 esse ad medium totius 17: & ut tota ratio $\frac{16}{18}$ est ad trientem suum $\frac{50}{52}$; ita reciprocè trientis medium Arithmeticum 51 esse ad medium totius 17: ideóque etiam, ut semis $\frac{33}{35}$ est ad trientem $\frac{50}{52}$; ita reciprocè trientis medium 51 esse ad medium semissis 34: Tantum porrò hanc analogiam abire à vero, quantum semisses, trientes, partesve aliæ rationum per VI hujus inventæ deficiunt ab exactis. Quamobrem id agendum, ne defectus ille instituto nostro officiat. Cæterum minor erit defectus, minúsque adeò officiet, quò rationes in analogiam adscitæ minores fuerint. Cum enim secundum demonstrationem præcedentis, octans exactus sedecim rationum foret $2a+15b+70c+227\frac{1}{2}d$, at summa duarum ex sedecim istis mediarum $2a+15b+49c+91\frac{1}{2}d$, qui est octans per VI inventus; patet differentiam horum octantium consistere in con-

temtiori parte secundarum & tertiarum differentiarum. Atqui rationum continuarum minores, habent differentias primas minores, ac proinde differentiarum secundarum & tertiarum partem exiliorem multò etiamnum minorem. Sed exemplo res fiet illustrior. Nam rationis $\frac{99}{101}$ semis, per VII hujus, est $\frac{199}{201}+\frac{7999399}{7999401}$; ubi ratio $\frac{199}{201}$ ab exactiori semisse deficit ratiunculâ superbipartiente $\frac{7999399}{7999401}$. Rursus rationem $\frac{199}{201}$ (quæ priùs assumtæ $\frac{99}{101}$ propemodũ semis est) si denuò bipartiamur per VII hujus, habebimus $\frac{399}{401}+\frac{127997599}{127997601}$, ubi ratio $\frac{399}{401}$ ab exactiori semisse deficit ratiunculâ superbipartiente $\frac{127997599}{127997601}$. Minor est igitur defectus, cùm bipartimur rationem minorem $\frac{199}{201}$, quàm si bipartiamur majorem $\frac{99}{101}$, quantò scilicet ratiuncula superbipartiens $\frac{127997599}{127997601}$ minor est superbipartiente $\frac{7999399}{7999401}$, hoc est propemodum, quantò 8 milliones minores sunt 128 millionibus, nimirum sedecim vicibus. Sed & ejusdem rationis quò minor pars sumetur per VI hujus, eò minùs deficiet à vero. Sic rationis $\frac{99}{101}$ semis, per VII hujus, erat $\frac{199}{201}+\frac{7999399}{7999401}$, & ejusdem triens per eandem est $\frac{299}{301}+\frac{8099459197}{8099460797}$, ubi quidem triens $\frac{299}{301}$ (qualis per VI invenitur) minùs deficit ab exactiori, quàm semis $\frac{199}{201}$ (per eandem in[illegible] quantò ratiuncula $\frac{8099459197}{8099460797}$ minor est alterâ $\frac{7999399}{7999401}$. Unde sequitur, cùm bipartitâ ratione $\frac{99}{101}$ secundum VI hujus, non nisi binarium quasi perdamus in octo millionibus, vel unitatem in quatuor millionibus; futurum, ut istius semisse $\frac{199}{201}$ (sive $\frac{99[5}{100[5}$) diminuto quovis modo per analogiam VItæ hujus superstructam, minus etiam perdamus; adeóque à ratione $\frac{99[5}{100[5}$ nos analogicè argumentari posse ad quamvis minorem terminorum æquidifferentium, ita ut minùs quàm unitatem perdamus in quatuor millionibus; quóque ratio, ad quam argumentamur, minor fuerit, eò jacturam fore minorem.

Propositio IX.

Datâ mensurâ rationis $\frac{99[5}{100[5}$ in particulis, qualium decupla continet 1,0000000; invenire mensuram cujusvis minoris rationis terminorum æquidifferentium, in particulis similibus.

Rationis $\frac{99[5}{100}$ mensura suprà inventa fuit 21769[3, & rationis $\frac{100}{100[5}$ mensura ibidem 21659[7, quarum summa exhibet rationem $\frac{99[5}{100[5}$ $=43429[0$. Dehinc oporteat nos invenire mensuram rationis $\frac{100}{101}$. Ergo per præcedentem dic:

Ut medium Arithmeticum terminorum $\frac{100}{101}$ (nimirum 100[5) ad medium Arithmeticum terminorum $\frac{99[5}{100[5}$ (nimirum 100) ita mensura hujus rationis (putà 43429) ad mensuram istius 43213. Tot igitur particulis Log-us absoluti 101 excedit Log-um absoluti 100. Quare, cùm Log-us absoluti 100 sit 2,0000000; oportet, ut Log-us absoluti 101 sit 2,0043213.

Porrò invenienda sit mensura rationis $\frac{101}{102}$. Dic:

Ut medium Arithmeticum terminorum $\frac{101}{102}$ (nimirum 101[5) ad medium Arithmeticum terminorum $\frac{99[5}{100[5}$ (nimirum 100) ita mensura hujus rationis (putà 43429) ad mensuram istius 42787. Tot igitur particulis Log-us absoluti 102 excedit Log-um absoluti 101. Quare, cùm Log-us absoluti 101 foret 2,0043213; oportet, ut Log-us absoluti 102 sit 2,0086000.

Cùm autem in omnibus hisce analogiis terminus secundus sit 100, & tertius 43429; liquet, ad inveniendam mensuram cujusvis rationum sequentium nihil amplius restare, quàm ut dividamus numerum 43429 per medium Arithmeticum terminorum rationis datæ. Cæterùm invenimus nos quidem rationis $\frac{99[5}{100[5}$ mensuram 43429, quæ fortè debebat esse unitate major, putà 43430; sed facilè intelligit quivis, si pro ratione $\frac{99]5}{100]5}$ assumsissemus

assumsissemus $\frac{999[5}{1000[5}$, & in cumulandis horum terminorum potestatibus calculum ad plures locos extendissemus, ad majorem utique præcisionem perveniri potuisse, adeóque huic methodo ad accuratam facilitatem nihil quicquam deesse. At non deest modus etiam hoc ipso facilior, qui post acquisitos paucos Logarithmos solâ additione rem peragit, & præterea probam suam secum fert, quem propositionibus sequentibus breviter exponemus.

Propositio X.

Rationum duarum continuarum differentia est ad aliarum duarum continuarum differentiam; ut harum communis termini quadratum, ad istarum communis termini quadratum; dummodo singularum termini sint æquidifferentes.

Sint duæ rationes continuæ $\frac{a}{a+b}$, & $\frac{a+b}{a+2b}$, quarum terminus communis est $a+b$, & hujus quadratum $aa+2ab+bb$; sint verò & aliæ duæ continuæ $\frac{a+3b}{a+4b}$, & $\frac{a+4b}{a+5b}$, quarum communis terminus est $a+4b$, & hujus quadratum $aa+8ab+16bb$. Singularum termini differunt communi excessu b. Differentia duarum priorum est $\frac{aa+2ab}{aa+2ab+bb}$, & posteriorum duarum $\frac{aa+8ab+15bb}{aa+8ab+16bb}$. Atque hæ differentiæ sunt quoque terminorum æquidifferentium. Ergo per VIII hujus, sunt propemodum, ut reciprocè ipsorum terminorum media Arithmetica; hoc est, ut prior differentia $\frac{aa+2ab}{aa+2ab+bb}$, ad posteriorem $\frac{aa+8ab+15bb}{aa+8ab+16bb}$: ita horum terminorum medium Arithmeticum $aa+8ab+15\frac{1}{2}bb$, ad medium Arithmeticum istorum $aa+2ab+\frac{1}{2}bb$; hoc est propemodum, ut communium terminorum quadrata, nimirum $aa+8ab+16bb$ ad $aa+2ab+bb$; quæ ab istis mediis Arithmeticis non nisi quantitate $\frac{1}{2}bb$ differunt, exiguâ sanè, & in rationibus minoribus (ubi sc. differentia terminorum b ad ipsos terminos exiguum instar habet) facilè contemnendâ.

Propositio

Propositio XI.

Rationum trium continuarum differentiarum differentia, est ad aliarum trium continuarum differentiarum differentiam, ut cubus medii Arithmetici mediæ ex his, ad cubum medii Arithmetici mediæ ex istis, dummodo singularum rationum termini sint æquidifferentes.

Sint tres rationes continuæ $\frac{a}{a+b}$, $\frac{a+b}{a+2b}$, $\frac{a+2b}{a+3b}$, quarum differentia differentiarum est $\frac{a^4+6a^3b+12aabb+8ab^3}{a^4+6a^3b+12aabb+10ab^3+3b^4}$, & mediæ illarum medium Arithmeticum est $a+\frac{3b}{2}$, cujus cubus $a^3+\frac{9aab}{2}+\frac{27abb}{4}+\frac{35b^3}{8}$; sint verò & aliæ tres continuæ $\frac{a+2b}{a+3b}$, $\frac{a+3b}{a+4b}$, $\frac{a+4b}{a+5b}$, quarum differentia differentiarum est $\frac{a^4+14a^3b+72aabb+160ab^3+128b^4}{a^4+14a^3b+72aabb+162ab^3+135b^4}$, & mediæ illarum medium Arithmeticum $a+\frac{7b}{2}$, cujus cubus $a^3+\frac{21aab}{2}+\frac{63abb}{4}+\frac{343b^3}{8}$. Cæterùm singulæ rationes differunt communi excessu b; at differentiæ differentiarum non sunt terminorum æquidifferentium, siquidem differentia terminorum prioris est $2ab^3+3b^4$, at posterioris $2ab^3+7b^4$: secùs ac in præcedenti propositione. Quare cùm illic res expediretur regulâ proportionum simplici inversâ, hic opus est duplici inversâ; nimirum:

Ut medium Arithmeticum prioris differentiæ differentiarum (nimirum $a^4+6a^3b+12aabb+9ab^3+\frac{3b^4}{2}$) ductum in differentiam terminorum posterioris ($2ab^3+7b^4$) ad medium Arithmeticum posterioris differentiæ differentiarum (nimirum $a^4+14a^3b+72aabb+161ab^3+\frac{263b^4}{2}$) ductum in differentiam terminorum prioris ($2ab^3+3b^4$:) Ita differentia differentiarum prior ad posteriorem: Ita quoque Cubus medii Arithmetici mediæ trium priorum rationum (nimirum $a^3+\frac{9aab}{2}+\frac{27abb}{4}+\frac{35b^3}{8}$) ad Cubum medii Arithmetici mediæ trium posteriorum rationum (nimirum $a^3+\frac{21aab}{2}+\frac{63abb}{4}+\frac{343b^3}{8}$.)

Quæ

Quæ analogia vera esse deprehendetur, si productum extremorum æquale sit producto mediorum.

Atqui primus terminus $a^4+6a^3b+12aabb+9ab^3+\frac{3b^4}{2}$ in $2ab^3+7b^4$ $=2a^5b^3+19a^4b^4+66a^3b^5+102aab^6+66ab^7+\frac{21b^8}{2}$, si ducatur in quartum $a^3+\frac{21aab}{2}+\frac{63abb}{4}+\frac{343b^3}{8}$; productum est $2a^8b^3+40a^7b^4+297a^6b^5+1180a^5b^6+2991\frac{1}{8}a^4b^7$, &c.

Rursus secundus terminus $a^4+14a^3b+72aabb+161ab^3+\frac{263b^4}{2}$ in $2ab^3+3b^4=2a^5b^3+28a^4b^4+144a^3b^5+322aab^6+263ab^7+\frac{789b^8}{2}$, si ducatur in tertium $a^3+\frac{9aab}{2}+\frac{27abb}{4}+\frac{35b^3}{8}$; productum est $2a^8b^3+40a^7b^4+339a^6b^5+1593a^5b^6+4558\frac{5}{8}a^4b^7$, &c.

Hoc igitur productum cùm consentiat cum isto, non modò in primis & secundis speciebus, sed & in maxima parte tertiarum & quartarum; ajo analogiam in propositione memoratam, veram esse. Nam defectus, qui hic apparet in productis terminorum, in ipsis terminis longè minor erat, quippe qui multiplicando crevit. Ut taceam in minoribus rationibus differentias secundas & tertias nullius ferè momenti esse.

Simili modo ostendetur, differentias tertias rationum continuarum & terminorum æquidifferentium, esse ut Quadrato-quadrata; quartas, ut Quadrato-cubos terminorum, qui singulis in tabella propositioni II subjunctâ, è regione opponuntur. Atque ita deinceps.

Propositio XII.

Numerorum in progressione Arithmetica ordinatorum Quadrata conveniunt in differentiis secundis, Cubi in tertiis, Quadrato-quadrata in quartis, & sic deinceps.

Patet ex inspectione tabellarum subjectarum:

Numeri	Quadrata	diff. I.	diff. II.
1	1		
		3	
2	4		2
		5	
3	9		2
		7	
4	16		

Numeri

Numeri	Cubi	diff. 1.	diff. 2.	diff. 3.
1	1			
		7		
2	8		12	
		19		6
3	27		18	
		37		6
4	64		24	
		61		
5	125			

Numeri	Quadrato-quadrata.	diff. 1.	diff. 2.	diff. 3.	diff. 4.
1	1				
		15			
2	16		50		
		65		60	
3	81		110		24
		175		84	
4	256		194		24
		369		108	
5	625		302		
		671			
6	1296				

Hinc patet, datis v. gr. cubis quatuor, vel quadrato-quadratis quinque, quo pacto cæteri continuâ additione fuccenturiari poffint. Sint enim dati

Cubi	diff. 1.	diff. 2.	diff. 3.
$a=8$			
	$e=19$		
$b=27$		$h=18$	
	$f=37$		$k=6$
$c=64$		$i=24$	
	$g=61$		$k=6$
$d=125$		$l=..$	
	$m=..$		
$n=...$			

Dic: $k+i=l$, $l+g=m$, $m+d=n$.

Propofitio XIII.

Logarithmos quotvis locorum continuâ ac folâ additione producere ita, ut ultimo exiftente probo, cœteri omnes fint probi.

Con-

Conftructio. Cùm fit $\frac{a}{b-c} = \frac{a}{b} + \frac{ca}{bb} + \frac{cca}{b^3} + \frac{c^3a}{b^4}$, & deinceps continuando progreffionem in infinitum; fi ponamus $a = 100 =$ medio Arithmetico rationis $\frac{99[5}{100[5}$ & $b = 100000$, & $c = 0[5$, adeò ut $b-c$ fit $99999[5 =$ medio Arithmetico rationis datæ $\frac{99999}{100000}$, cujus menfuram invenire oportet, erit $\frac{a}{b-c}$ (nimirum $\frac{100}{99999[5}$) $= \frac{a}{b}$ (five $\frac{100}{100000}$ vel $0|001$) $+ \frac{ca}{bb}$ (five $\frac{0[5 * 100}{10000000000}$ vel $\frac{50}{10000000000}$ vel $0|000000005$) $+ \frac{cca}{b^3}$ (five $\frac{0[25 * 100}{1000000000000000}$ vel $\frac{25}{1000000000000000}$ vel $0|000000000000025$) $+ \frac{c^3a}{b^4}$ (five $\frac{0[125 * 100}{100000000000000000000}$ vel $\frac{1[25}{100000000000000000000}$ vel $0|000000000000000000125$) $= 0|001000005000025000125$:

fin manentibus a & b, ut antè, ponatur $c = 1[5$; erit $\frac{a}{b-c} = 0|001000015000225003375$: vel fi rurfus manentibus a & b, ponatur $c = 2[5$; erit $\frac{a}{b-c} = 0|001000025000625015625$. Liquet ex præcedenti, quo pacto datis numeri 5 quadrato & cubo, fequentium quoque numerorum 15, 25, cæterorumque quadrata & cubi additione continuâ inveniri poffint. Iftis igitur numeris cum fuis quadratis & cubis ritè difpofitis ita, ut poft unitatem in $0[001$ fextum locum occupet ultima figura numeri 5 (vel 15, vel 25;) & fextum ab hac locum ultima figura quadrati 25 (vel 225, vel 625;) & ab hac rurfus fextum locum ultima figura cubi 125 (vel 3375, vel 15625; (quemadmodum exempla fuperiora oftendunt: conflati erunt numeri, qui in tertium Regulæ aureæ terminum 43429 ducendi funt finguli, ut prodeat menfura rationum datarum $\frac{99999}{100000}$, $\frac{99998}{99999}$, $\frac{99997}{99998}$. Atque hæc multiplicatio, ut folâ quoque additione perficiatur, digerendus eft terti[illegible] terminus 43429 in tabellam fubfidiariam, hoc modo:

1	43429
2	86858
3	130287
4	173716
5	217145
6	260574
7	304003
8	347432
9	390861

Acquiſitâ hoc modo rationum omnium menſurâ à $\frac{99999}{100000}$ uſque ad $\frac{10000}{10001}$ in particulis, qualium decupla continet 1,0000000; mox addendo has ordine retrogrado concinnabimus Logarithmos ſingulorum abſolutorum à 10000 ad 100000; quorum ultimus ſi ſit probus, præcedentes omnes erunt probi; niſi fortè error poſterior quaſi ex condicto corrigat priorem, quod in hac non magis quàm omnibus aliis probis, nec niſi rariſſimè uſuvenire poteſt.

ATque ita expoſitâ methodo conſtruendi Logarithmos novâ, accuratâ, & facili, haud ſcio, an opus ſit monere Lectorem, ſi ad praxin accedere luberet, non requiri compoſitorum numerorum Logarithmos; ideoque omnes pares primùm excludendos, deinde omnes à quinario productos; ita, ut reſtent ſoli Logarithmi numerorum in unitatem, 3rium 7rium 9rium exeuntium, àtque horum quoque tertium quemque, cùm ſit ex ternario compoſitus, omitti poſſe. Sic acquiſitis Logarithmis abſolutorum 1003 & 10013, omiſſo Log-o abſoluti 10023 ex ternario compoſiti quærendus eſt Log-us abſoluti 10033, utpote triceſſimi ab abſoluto 10003; tum Log-us abſoluti 10043, triceſimi ab abſoluto 10013: tum rurſus omiſſo Log-o numeri 10053, quærantur Log-i numerorum 10063, 10073; atque ita deinceps. Quare dicendum per Regulam Propoſitione VIII. traditam:

Ut 10048, nimirum medium Arithmeticum inter 10033 & 10063,
ad 10018, nimirum medium Arithmeticum inter 10003 & 10033:
Ita 13006, nimirum differentia Logarithmorum congruentium abſolutis 10003 & 10033,

ad

ad 12967; differentiam Log-orum competentium abſolutis 10033 & 10063.

Dico:

$$\text{Ut}\left\{\begin{matrix}10048\\10078\\10108\\\&c.\end{matrix}\right\}\text{ad } 10018;\ \text{ita } 13006,\ \text{ad}\left\{\begin{matrix}12967\\\&c.\end{matrix}\right.$$

Item:

$$\text{Ut}\left\{\begin{matrix}10058\\10088\\10118\\\&c.\end{matrix}\right\}\text{ad } 10028;\ \text{ita } 12992,\ \text{ad}\left\{\begin{matrix}12953\\\&c.\end{matrix}\right.$$

At tertius qui ſequitur ordo, nimirum:

$$\text{Ut}\left\{\begin{matrix}10068\\10098\\\&c.\end{matrix}\right\}\text{ad } 10038;\ \text{ita } 12979,\ \text{ad}\left\{\begin{matrix}12940\\\&c.\end{matrix}\right.$$

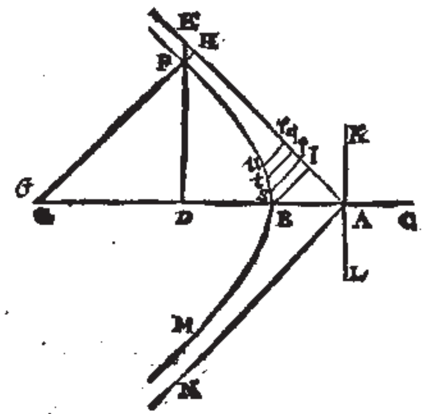
hic ipſe eſt, quem omittendum indigeto.

Pari modo tertius quiſque in unitatem 7rium, 9rium exeuntium omittetur. Itaque fiet, omiſſis paribus lucrifaciamus ſemiſſem operæ, & detractis quinariis rurſus partem decimam, denique excluſo tertio quoque in 1, 3, 7, 9, deſinentium, trientem laboris reſidui; unde non niſi $\frac{4}{15}$. nonaginta chiliadum, quæ ſunt à 10000 ad 100000, induſtriam noſtram expectant. Hoc eſt, de 90 chiliadibus reſtant ſolùm 24 concinnandæ. Cæteros compoſitos à 7rio, 11rio, aliis ve primis genitos, non eſt operæ pretium ſecernere in methodo tam proclivi; præſertim cùm probando calculo inſervire poſſint.

Cæterum ex iis, quæ hactenus diſſeruimus, ſatis liquet, naturam Logarithmorum Geometriæ nullo modo obnoxiam eſſe; ſed verius ac liquidius ex proprio ſuo fonte manare. Intercedit tamen utriſque cognatio ſuavis, & contemplatione digniſſima, quam deinceps paucis exponere non gravabor.

 PROPO-

Propositio XIV.



Sit Hyperbole MBF, cujus latus rectum KL æquale sit transverso BC; erunt asymptoti AN & AE ad angulos rectos, & quadratum DF æquale rectangulo CDB per 21. *I.* Conicor. Ex B & F cadant perpendiculares ad asymptoton BI & FH. Dico, AH esse ad AI, ut BI ad FH.

Demonstratio. Sit $AB = 1 = AC$

$BC = AB + AC = 2$

$BD = a$

$AD = AB + BD = 1+a = DE$

$CD = BC + BD = 2+a$

$CD * BD = 2+a$ in $a = 2a+aa = Q:DF$

$DF = \sqrt{2a+aa} = DG$

$AG = AD + DG = 1+a+\sqrt{2a+aa}$

$\sqrt{2} . 1 :: AG . AH$

$$AH = \frac{1+a+\sqrt{2a+aa}}{\sqrt{2}}$$

$EF = DE - DF = 1+a-\sqrt{2a+aa}$

$\sqrt{2} . 1 :: EF . FH$

FH

$$FH = \frac{1+a-\sqrt{2a+aa}}{\sqrt{2}}$$

Ducatur AH in FH;

ponendo $1+a = c$, & $\sqrt{2a+aa} = d$

erit $1+2a+aa = cc$ } subtrahe

& $2a+aa = dd$

$1 = cc - dd$

$$\frac{cc-dd}{\sqrt{2} * \sqrt{2}} = \frac{1}{2} = AH * FH \qquad \alpha$$

$\sqrt{2} . 1 :: AB . AI$

$$AI = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$AI * BI = \frac{1}{\sqrt{2}} * \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \qquad \beta$$

Ergo per α & β, $AH * FH = AI * BI$

& $AH . AI :: BI . FH$ q.e.d.

Propositio XV.

In diagrammate præcedenti, positâ $AI = BI = 1$, & $HI = a$; oporteat invenire FH.

Dic per præcedentem: ut AH ad AI, ita BI ad FH; hoc est, $1+a . 1 :: 1 . \frac{1}{1+a}$; nimirum FH æqualis est unitati divisæ per $1+a$. Perficitur autem divisio ipso opere sic:

b c) d

$1+a$) 1 | e 1

f g

$1+a$

h i

$0-a$ | k $-a$

l m

$-a-aa$

n o

$0+aa$ | p $+aa$

r

q 3

$aa+a$

t

s 3

$0-a$ | u 3 $-a$

Ap-

Applica $\overset{b}{1}+\overset{c}{a}$ ad $\overset{d}{1}$, oritur $\overset{e}{1}$; tum $\overset{e}{1}$ in $\overset{b}{1}+\overset{c}{a}$ producit $\overset{f}{1}+\overset{g}{a}$ subducendum ex $\overset{d}{1}$, & restat $\overset{h}{o}-\overset{i}{a}$. Rursus $\overset{b}{1}+\overset{c}{a}$ applicetur ad $\overset{h}{o}-\overset{i}{a}$, oritur $\overset{k}{-a}$; tum $\overset{k}{-a}$ in $\overset{b}{1}+\overset{c}{a}$ producit $\overset{l}{-a}\overset{m}{-aa}$, subducendum ex $\overset{h}{o}-\overset{i}{a}$, & restat $\overset{n}{o}+\overset{o}{aa}$. Ad hoc applica $\overset{b}{1}+\overset{c}{a}$, oritur $\overset{p}{+aa}$; quod ductum in $\overset{b}{1}+\overset{c}{a}$ gignit $\overset{q}{aa}+\overset{r}{a^3}$, subducendum ex $\overset{n}{o}+\overset{o}{aa}$, & restat $\overset{s}{o}-\overset{t}{a^3}$. Atque ita continuatâ operatione, deprehenditur $\frac{1}{1+a}=1-a+aa-a^3+a^4$ (&c.) $=FH$.

Propositio XVI.

Quovis numero in partes æquales innumeras discerpto; invenire summam quarumvis potestatum ab innumeris istis numeris genitarum.

Numeri dati potestas proximè superior potestatibus quæsitis, si dividatur per exponentem suum, extabit summa potestatum quæsita.

V. gr. Numerus datus sit 21, hic si discerpatur in partes innumeras, continebit non modò hos numeros 20, 19, 18, 17 &c. sed & innumeros interjectos, quorum quisque intelligitur ductus in unam partem infinitissimam numeri 21. Horum igitur omnium productorum summam si quæras; quoniam ipsa producta sunt potestates primæ (sive lineæ;) erit potestas proximè superior quadratica; & ejus exponens 2. Ergo dati numeri 21 quadratum 441, si dividatur per exponentem 2, extabit summa omnium primarum potestatum, genitarum ab innumeris istis numeris, qui in dato numero 21 continentur, nimirum 220⌊5. Rursus quævis potestas prima intelligatur ducta in seipsam, & oporteat nos invenire summam omnium istorum quadratorum. Potestas proximè superior est cubica, & ejus exponens 3. Ergo dati numeri 21 Cubus 9261, si dividatur per exponentem 3, extabit summa omnium quadratorum 3087. Horum quadratorum quodvis ducatur in suum latus, & oporteat nos invenire summam omnium istorum cuborum. Potestas proximè superior est quadrato-quadratica, & ejus exponens 4. Ergo dati numeri 21 quadrato-quadratum 194481, si dividatur per exponentem 4, extabit summa omnium cuborum 48620⌊25.

Demonstratio.

Demonstratio. Summa omnium ab unitate imparium æqualis est quadrato numeri terminorum sic numerus terminorum omnium imparium ab unitate usque ad 21 est 11, cujus quadratum 121 æquale est summæ omnium horum imparium; 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21. At idem quadratum 121 duplicatum, nimirum 242, excedit summam omnium eorundem imparium una cum paribus inclusis, ipso numero terminorum 11; deficit autem á summa omnium parium æque ac imparium eodem numero terminorum 11. Ergo quadratum duplicatum numeri terminorum imparium non potest excedere vel deficere à summa omnium tam parium, quàm imparium, plusquam ipso numero terminorum imparium, hoc est (si termini sint innumeri) eodem numero terminorum sive dimidio termini maximi, ducto in partem infinitissimam numeri dati. Quod productum si quis putet, adhuc rationem aliquam obtinere ad summam omnium terminorum; nondum utique divisus est numerus datus in partes innumeras, quod est contra hypothesin. Ergo quadratum dimidii numeri terminorum (tam parium quàm imparium) duplicatum; vel, quod idem est; Dimidium quadrati numeri omnium terminorum (tam parium quàm imparium) æquale est summæ omnium terminorum.

Rursus; Numerus pyramidalis ultimi ab unitate imparium, æqualis est summæ omnium quadratorum ab iisdem imparibus factorum. Sic numeri 21, tanquam ultimi imparium, pyramidalis 1771, æqualis est summæ omnium quadratorum factorum ab his imparibus, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21. Unde haud secùs, ac modò, conficietur; eundem pyramidalem duplicatum (si termini sint innumeri) vel, quod idem est; trientem cubi facti à numero dato, æqualem esse summæ omnium quadratorum ab imparibus æquè ac paribus factorum.

Item; Ultimi cujusvis Trigonus in se ductus, æqualis est summæ omnium cuborum ab imparibus æquè ac paribus factorum. Sed Trigonus iste, sive summa terminorum, suprà æqualis erat $\frac{\text{Quadrato}}{2}$, ergo ejusdem. Trigoni quadratum æquale est $\frac{\text{Quadrato quadrato}}{4}=$ summæ omnium Cuborum. Atque ità deinceps.

Propositio XVII.

Quadrare Hyperbolam.

In diagrammate præcedenti, posito $AI=1$; intelligatur asymptotos inde ab I versus E divisa in partes æquales innumeras, quæ sint *v. gr.*

$Ip = pq = qr = a$. Erit, per XIV & XV hujus, $ps = 1 - a + aa - a^3 + a^4$, &c. & $qt = 1 - 2a + 4aa - 8a^3 + 16a^4$, &c. & $ru = 1 - 3a + 9aa - 27a^3 + 81a^4$, &c. Sed $ps + qt + ru =$ areæ $BIru =$

$$= \left\{ \begin{array}{l} 1 - a + aa - a^3 + a^4 \\ 1 - 2a + 4aa - 8a^3 + 16a^4 \\ 1 - 3a + 9aa - 27a^3 + 81a^4 \end{array} \right\} \&c. =$$

$$= 3 - 6a + 14aa - 36a^3 + 98a^4,$$

hoc est, $=$ numero terminorum contentorum in linea Ir, minus summâ eorundem terminorum, plus summâ quadratorum ab iisdem, minus summâ cuborum, plus summâ quadrato-quadratorum, &c.

Hinc posito, ut antè, $IA = 1$; sed $Ip = 0|1 =$ numero terminorum: invenio, per XV & XVI hujus, aream $BIps =$ numero terminorum $= 0|1$, minus summa eorundem terminorum $= 0|005$, plus summa quadratorum ab iisdem $= 0|000333333$, minus summa cuborum $= 0|000025$, plus summa quadrato-quadratorum $= 0|000002$, minus summa quadrato cuborum $= 0|000000166$, plus summa cubo-cuborum $= 0|00000001\,4$, &c.

$$\begin{array}{rl} & \left\{ \begin{array}{l} 0|1 \\ 0|000333333 \\ 0|000002 \\ 0|00000001\,4 \end{array} \right. \\ + & \\ \hline + & 0|100335347 \\ - & 0|005025166 \\ \hline + & 0|095310181 \end{array} \quad \Bigg\| \quad \begin{array}{rl} - & \left\{ \begin{array}{l} 0|005 \\ 0|000025 \\ 0|000000166 \end{array} \right. \\ \hline - & 0|005025166 \end{array}$$

$= $ areæ $BIps$.

Sic posito $Iq = 0|21 =$ numero terminorum: invenio, per XV & XVI hujus, aream $BIqt =$ numero terminorum $= 0|21$, minus summa eorundem terminorum $= 0|02205$, plus summa quadratorum ab iisdem $= 0|003087$, minus summa cuborum $= 0|000486202$, plus summa quadrato-quadratorum $= 0|000081682$, minus summa quadrato-cuborum

cuborum $= 0|000014294$, plus summa cubo-cuborum $= 0|000002572$, minus summa quadrato-quadrato-cuborum $= 0|000000472$ plus summa quadrato-cubo-cuborum $= 0|000000088$.

$$\begin{array}{rl} + & \left\{ \begin{array}{l} 0|21 \\ 0|003087 \\ 0|000081682 \\ 0|000002572 \\ 0|000000088 \\ 0|000000003 \end{array} \right. \\ \hline + & 0|213171345 \\ - & 0|022550984 \\ \hline + & 0|190620361 \end{array} \quad \Bigg\| \quad \begin{array}{rl} - & \left\{ \begin{array}{l} 0|02205 \\ 0|000486202 \\ 0|000014294 \\ 0|000000472 \\ 0|000000016 \end{array} \right. \\ \hline - & 0|022550984 \end{array}$$

$=$ areæ $BIqt$.

Unde apparet, ut ratio AI ad Ap (1 ad $1|1$) est dimidiata rationis AI ad Aq (1 ad $1|21$;) ita aream $BIps$ esse dimidiam areæ $BIqt$. Cæterum proclive est hunc calculum extendere ad quotvis loca, quod mihi tentanti, prodiit area $BIps = 0|0953101798043248600439521232807650922206053\,4$; & area $BIqt = 0|190620359608649720087904246561530184441210\,72$, quam cùm exactè duplam deprehenderem istius superioris scivi inde me calculum rectè posuisse.

Propositio XVIII.

Comparare areolas Hyperbolicas cum ratiunculis absolutorum æquidifferentium.

In diagrammate præcedenti, positâ $AI = 1$, & asymptoto inde ab I versus E divisâ in partes æquales innumeras, quæ sint v, gr. Ip, pq, qr: erit areola $BIps$ mensura ratiunculæ, quam AI obtinet ad Ap; & areola $spqt$ mensura ratiunculæ, quam Ap obtinet ad Aq; & areola $tqru$ mensura ratiunculæ, quam Aq obtinet Ar, &c. Atque areolæ istæ supputantur prorsus eodem modo, quo suprà Propositione VIII & IX. rationes terminorum æquidifferentium. Id quod paucis indicare, oportunum duxi.

F Propositio

Propoſitio XIX.

Invenire ſummam Logarithmorum.

In eodem diagrammate poſitâ $AI = 1$, & aſymptoto inde ab I verſus E diviſâ in partes æquales innumeras, quæ ſint *v. gr.* Ip, pq, qr. oportet invenire ſummam areolarum; $BIps + BIqt + BIru$ (&c.) = ſummæ Logarithmorum = ſolido, conſtanti ex areola $BIps$ perpendiculariter inſiſtente lineæ ps, & areola $BIqt$ perpendiculariter inſiſtente lineæ qt, & areola $BIru$ perpendiculariter inſiſtente lineæ ru, &c. ductis nimirum ſingulis in unam infinitiſſimam lineæ datæ.

Conſtructio hujus Problematis congruit cum conſtructione propoſitionis XVII. ſubſtituendo nimirum pro numero terminorum, ſummam eorundem; & pro ſumma terminorum, ſummam quadratorum; & pro ſumma quadratorum, ſummam cuborum; &c. Sic poſitâ $AI = 1$, & $Ip = 0|1$, oporteat nos invenire ſummam omnium Logarithmorum inde ab 1 ad 0|1.

$$
\begin{array}{rl|rl}
+ & \begin{cases} 0|005 \\ 0|0000008333 \\ 0|0000000033 \end{cases} & - & \begin{cases} 0|000166666 \\ 0|0000005 \\ 0|000000002 \end{cases} \\
\hline
+ & 0|0050008366 & - & 0|000167168 \\
- & 0|000167168 & & \\
\hline
 & 0|004841198 & & = \text{ſummæ omnium Log-orum.}
\end{array}
$$

Hinc patet, quomodo productum continuum omnium à 0 ad numerum datum Arithmeticè progredientium inveniri queat. Nam ſumma Log-orum, eſt Log-us producti continui.

Patet quoque ex præcedentibus, quo pacto Problema *Merſennianum*, ſi non Geometricè ſaltem in numeris, ad quotvis uſque locos ſolvi poſſit. Atque hic jam filum abrumpere cogor, tantiſper dum otium pertexendi reliqua largiatur Deus. *FINIS.*

Sequitur

MICHAELIS ANGELI RICCII
GEOMETRICA Exercitatio.

Præfatio.

Michaelis Angeli Riccii
EXERCITATIO GEOMETRICA
De MAXIMIS & MINIMIS.

LONDINI,
Typis *Guilielmi Godbid*, & Impenſis *Moſis Pitt* Bibliopolæ, in vico vulgo vocato *Little Britain*. Anno M. DC. LXVIII.