Extra övningsuppgifter till kapitel 1 - 3 **18/11 2000**

1.1 Skriv följande periodiska decimaltal på bråkform.

(a) 1.16666... (b) 0.363636... (c) 0.27777...

1.2 Förenkla uttrycken utan att använda räknare.

(a) $\frac{5}{7}+\frac{9}{4}$ (b) $\frac{4}{9}-\frac{5}{12}$ (c) $\frac{2}{3}-\frac{1}{12}+\frac{7}{15}$

1.3 Förenkla uttrycken utan räknare.

(a) $\frac{9}{4}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{14}{3}\cdot\frac{8}{15}$ (b) $\dfrac{\frac{5}{4}+3}{\frac{1}{2}-\frac{2}{3}}$ (c) $\dfrac{\frac{1}{5}\left(3-\frac{7}{5}\right)}{\left(1-\frac{2}{5}\right)\left(1+\frac{2}{5}\right)}$

1.4 Förenkla följande uttryck.

(a) $\dfrac{\frac{3}{x}+\frac{x}{7}}{\frac{x-1}{x}-\frac{x+2}{7}}$ (b) $\dfrac{\frac{2}{1-x}-\frac{2}{x+1}}{\frac{2}{x-1}-\frac{6}{x-3}}$ (c) $\dfrac{\frac{x+2}{5}\cdot(x+6)}{\left(2+\frac{x}{3}\right)\left(2-\frac{x}{3}\right)}$

1.5 Lös ut R ur följande ekvationer.

(a) $\frac{1}{2R}+\frac{2}{R}=3$ (b) $\frac{1}{R}-\frac{2}{5}=\frac{3}{4}$ (c) $\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}$

1.6 En pendels totala energi i startläget är lika med dess totala energi i ett senare läge. Detta leder fram till ekvationen

$$mgh = \frac{mv^2}{2}$$

Lös ut farten v ur denna ekvation.

1.7 Lös ut avståndet r ur ekvationen

$$\frac{mgr}{2} = mg(h-2r)$$

1.8 En glasskulptur har formen av en cylinder med ett halvklot ovanpå. Cylindern och halvklotet har samma diameter. Denna diameter är en tredjedel av cylinderns höjd. Hela skulpturen väger 84.5 ton. Hur hög är skulpturen? (Glasets densitet är 2.58 ton/m^3.)

1.9 Sven och Olle börjar samtidigt springa längs en 10 km lång motionsslinga. De springer åt var sitt håll i jämn fart. Hela slingan springer de på 48 respektive 55 minuter. Efter hur lång tid möttes de?

1.10 Skriv följande logaritm-uttryck på formen $a\ln 2 + b\ln 3$:

(a) $\ln 6 + \ln 18$ (b) $\ln\frac{4}{3}-\ln\frac{1}{2}$ (c) $\ln 1296$

1.11 För vilka värden $x > 0$ ligger parabeln $y = 4x^2$ över linjen $y = 3x + 5$?

1.12 Bestäm definitions- och värdemängd till funktionen

$$y = \sqrt{8x - 14 - x^2}$$

1.13 För vilka vinklar v (i radianer) gäller

$$\sin v = \sin 2\ ?$$

1.14 För vilka vinklar v (i radianer) gäller

$$\cos v = \cos 0.3 \text{ ?}$$

En *linjär* funktion är en polynomfunktion av typen

$$f(x) = ax + b$$

Grafen till en linjär funktion är en rät linje.

1.15 Bestäm riktningskoefficienten k för den linjära funktionen f då
(a) $f(9) - f(8) = 4$ (b) $f(7) - f(4) = 6$ (c) $f(5) - f(1) = 0$

1.16 Bestäm skillnaden $f(6) - f(2)$ för den linjära funktionen f då riktningskoefficienten är
(a) $k = 1$ (b) $k = 5$ (c) $k = -3$

1.17 Bestäm skillnaden $f(5) - f(3)$ för den linjära funktionen f då
(a) $f(7) - f(6) = 4$ (b) $f(3) - f(-2) = 2$ (c) $f(7) - f(0) = -4$

2.1 Vilken punkt innanför kurvan ligger längst ifrån kurvan?
(a) $x^2 + 4x + y^2 - 6y = 5$ (b) $x^2 + 2y^2 = x$ (c) $3x^2 + 2x + 5y^2 - y = 4$

2.2 Faktorisera följande polynom
(a) $6 - x - x^2$ (b) $s^2 - 2s - 4$ (c) $t^4 - 5t^2 + 2t^3 - 10t$

2.3 På grund av det varma sommarvädret utbreder sig giftalger i Östersjön. Tillväxten är exponentiell, volymen ökar med 12% varje dygn. Efter hur många dygn har volymen giftalger fyrdubblats?

2.4 Efter avslutad utbildning får Elin och David båda fast anställning. Elin får 22000 kr i månaden som ingångslön och är lovad en årlig löneökning på 3%. David börjar med 19000 kr, men är å andra sidan lovad 4% i årlig löneökning. Hur länge dröjer det innan David får högre lön än Elin om lönelöftena hålls?

2.5 Lös följande ekvationer:
(a) $9 + 2\sqrt{x} = x - 6$ (b) $2\sqrt{3 - x} = 3\sqrt{2 - x}$ (c) $\ln(x + 5) = 2 + \ln x$

2.6 Bestäm samtliga skärningspunkter mellan andragradskurvorna

$$x^2 - y^2 = 3 \quad \text{och} \quad x^2 + 2y^2 = 5$$

2.7 Bestäm konstanten a, så att formeln nedan gäller:

$$\sin 4x = a \cdot \sin x \cos x(\sin x + \cos x)(\sin x - \cos x)$$

I tillämpade sammanhang kan *svängningar* beskrivas med funktioner av typen

$$f(x) = A \cdot \sin(x + \varphi)$$

där (den positiva) konstanten A är svängningens *amplitud* och $x + \varphi$ är dess *fasvinkel*.

2.8 En funktion av typen $f(x) = a \cdot \sin x + b \cdot \cos x$ kan, med hjälp av additionsformeln (A17) för sinus skrivas som $f(x) = A \cdot \sin(x + \varphi)$ (med $A \geq 0$).
(a) Visa att $a = A \cdot \cos\varphi$ och $b = A \cdot \sin\varphi$
(b) Visa att $a^2 + b^2 = A^2$

2.9 Bestäm största och minsta värde för funktionen
(a) $f(x) = \sin x$ (b) $f(x) = 3 \cdot \sin 2x$ (c) $f(x) = A \cdot \sin(x + \varphi)$
(d) $f(x) = 5 \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ (e) $f(x) = 3 \cdot \sin(\pi x - 1)$ (f) $f(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$

2.10 Bestäm största och minsta värde för funktionen
(a) $f(x) = 3 \cdot \sin x + 4 \cdot \cos x$ (b) $f(x) = 4 \cdot \sin x - 3 \cdot \cos x$ (c) $f(x) = \sin x + \cos x$

2.11 Bestäm största och minsta värde för
(a) $f(x) = \sin x \cdot \cos x$ (b) $f(x) = (\sin x)^2$ (c) $f(x) = 3 \cdot (\cos x)^2 - 1$

2.12 Bestäm största och minsta värde för

$$f(x) = \sin x - \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$$

2.13 En svängning beskrivs av funktionen

$$f(t) = 3 \cdot \sin t - \sqrt{3} \cdot \cos t$$

Bestäm
(a) svängningens amplitud (b) en fasvinkel (för $t = 0$) mellan $-\frac{\pi}{2}$ och $\frac{\pi}{2}$

3.1 Hörnen i kvadraten ABCD är orienterade moturs i det komplexa talplanet. Man vet att

$$A = 2 + 2i \quad \text{och} \quad B = -1 + 3i$$

Bestäm hörnen C och D.

3.2 Låt $z_1 = 1 - i$, $z_2 = 4i$, $z_3 = 1 + i\sqrt{3}$ .Bestäm
(a) z_1^{10} (b) $z_1^2 z_2^3 z_3$ (c) $\dfrac{2z_1^8}{z_2 z_3^2}$

3.3 Var och en av följande tredjegradsekvationer har en heltalsrot. Bestäm samtliga rötter.
(a) $z^3 - z^2 + 4z - 4 = 0$ (b) $z^3 + 4z^2 + 7z + 6 = 0$ (c) $z^3 - 5z - 12 = 0$

3.4 För en viss elektrisk krets ges den så kallade impedansen Z, vid frekvensen ω, av formeln

$$Z = \frac{1 + i\omega}{1 + i\omega - \omega^2}$$

Bestäm impedansens belopp och argument då frekvensen $\omega = 2$. Ta fram närmevärden med hjälp av räknare (svara med två decimaler).

3.5 Lös följande ekvationer
(a) $z^4 + 4z^3 + 8z^2 = 0$ (b) $z^4 + 5z^2 - 36 = 0$ (c) $z^8 - 8z^4 - 9 = 0$

FACIT

1.1 a) 7/6 (b) 4/11 (c) 5/18

1.2 (a) 83/28 (b) 1/36 (c) 21/20

1.3 (a) 4 (b) –51/2 (c) 8/21

1.4 (a) $\dfrac{21 + x^2}{-7 + 5x - x^2}$ (b) $\dfrac{x-3}{x+1}$ (c) $\dfrac{9}{5} \cdot \dfrac{x+2}{6-x}$

1.5 (a) $R = 5/6$ (b) $R = 20/23$ (c) $R = \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$

1.6 $v = \sqrt{2gh}$

1.7 $r = 2h/5$

1.8 Skulpturen är 8.13 m hög.

1.9 Efter 25.6 minuter.

1.10 (a) $2\ln 2 + 3\ln 3$ (b) $3\ln 2 - \ln 3$ (c) $4\ln 2 + 4\ln 3$

1.11 $x > \frac{1}{8}(3 + \sqrt{89})$

1.12 Definitionsmängd: $4 - \sqrt{2} \le x \le 4 + \sqrt{2}$ Värdemängd: $0 \le y \le \sqrt{2}$

1.13 $v = 2 + n2\pi,\ v = \pi - 2 + n2\pi$

1.14 $v = \pm 0.3 + n2\pi$

1.15 (a) 4 (b) 2 (c) 0

1.16 (a) 4 (b) 20 (c) –12

1.17 (a) 8 (b) $\frac{4}{5}$ (c) $-\frac{8}{7}$

2.1 (a) $(-2, 3)$ (b) $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ (c) $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{10}\right)$

2.2 (a) $(2-x)(x+3)$ (b) $(s - 1 + \sqrt{5})(s - 1 - \sqrt{5})$ (c) $t(t+2)(t+\sqrt{5})(t-\sqrt{5})$

2.3 $\dfrac{\ln 4}{\ln 1.12} \approx 12.2$ dagar

2.4 16 år (Då har naturligtvis Elin bytt jobb för länge sedan)

2.5 (a) $x = 25$ (b) $x = 6/5$ (c) $x = \dfrac{5}{e^2 - 1}$

2.6 $\left(\pm\sqrt{\frac{11}{3}}, \pm\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$

2.7 $a = -4$

2.9 (a) 1 och –1 (b) 3 och –3 (c) *A* och –*A*
(d) 5 och –5 (e) 3 och –3 (f) 1 och –1

2.10 (a) 5 och –5 (b) 5 och –5 (c) $\sqrt{2}$ och $-\sqrt{2}$

2.11 (a) $\frac{1}{2}$ och $-\frac{1}{2}$ (b) 0 och 1 (c) 2 och –4

2.12 1 och –1

2.13 (a) $A = 2\sqrt{3}$ $(\sqrt{12})$ (b) $\varphi = -\dfrac{\pi}{3}$

3.1 $C = -2$, $D = 1 - i$

3.2 (a) $-32i$ (b) $-128(1 + i\sqrt{3})$ (c) $-\sqrt{3} + i$

3.3 (a) $1, \pm 2i$ (b) $-2, -1 \pm i\sqrt{2}$ (c) $3, -\dfrac{3}{2} \pm i\dfrac{\sqrt{7}}{2}$

3.4 Impedansens belopp är 0.62 och dess argument är –1.45

3.5 (a) $0, -2 \pm 2i$ (b) $\pm 2, \pm 3i$ (c) $\pm\sqrt{3}, \pm\sqrt{3}i, \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\pm 1 \pm i)$