Extra övningsuppgifter 3 — 28/9 1997

6.1 Ett plan är givet i form av en punkt (x_0, y_0, z_0) samt två vektorer (a, b, c) och (d, e, f) i planet som inte är parallella. För varje punkt (x, y, z) i planet gäller då

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} = 0$$

(a) Förklara det påstående som görs i texten ovan.

(b) Bestäm, enligt formeln ovan, ekvationen för det plan som går genom punkten $(1, 0, 2)$ och innehåller vektorerna $(1, 1, 0)$ samt $(0, 1, 2)$.

6.2 Ange en 3×3-matris vars enda egenvärden är 5 och 7.

6.3 (a) Bestäm den matris A som har egenvektorer $(1,0)$ och $(0,1)$ med egenvärdena 1 resp. -1.

(b) Beräkna $A \cdot \vec{v}$ för en godtycklig vektor $\vec{v} = (v_1, v_2)$.

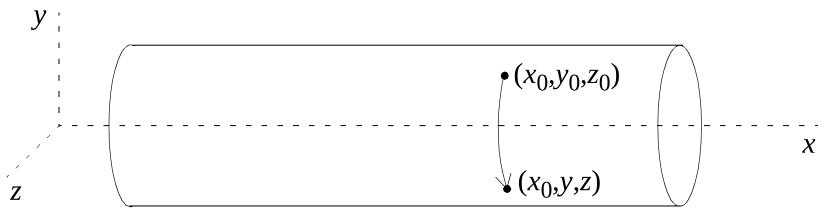
(c) Ge en geometrisk tolkning av sambandet mellan $A \cdot \vec{v}$ och $\vec{v}$.

(d) Bestäm samtliga egenvärden och egenvektorer för matrisen

$$B = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

(e) Ge en geometrisk tolkning av sambandet mellan $B \cdot \vec{v}$ och $\vec{v}$.

6.4 En roterande cylinder med radien 5 cm har x-axeln som rotationsaxel.



Cylindern roterar ett varv på 2 sekunder. Vid tiden $t = 0$ har en viss punkt i cylindern koordinaterna (x_0, y_0, z_0). Vid tiden $t > 0$ kallar vi punktens nya koordinater (x, y, z).

(a) Man kan beräkna y och z genom att utnyttja det komplexa sambandet

$$y + iz = (y_0 + iz_0) \cdot e^{i\pi t}$$

Förklara varför detta samband gäller. Lös sedan ut y och z uttryckta i y_0, z_0 och t.

(b) Ange, i form av en matrisprodukt, (x, y, z) uttryckt i (x_0, y_0, z_0). (Vissa av matrisens komponenter måste uttryckas i variabeln t.)

(c) Ange en egenvektor till matrisen i (b). Vilket är motsvarande egenvärde?

(d) För vissa värden på t finns det fler egenvektorer till matrisen. Vilka då?

6.5 En behållare, i form av en parallellepiped, spänns upp av vektorerna

$$\vec{u} = (3, 3, 3)\,,\ \vec{v} = (0, -2, 3)\ \text{och}\ \vec{w} = -(1, -2, 8)\,.$$

En cylindrisk järnstav läggs helt och hållet in i behållaren. Cylinderaxeln är riktad vinkelrätt mot planet som spänns upp av vektorerna $\vec{u}$ och $\vec{v}$. Hur stor volym rymmer behållaren ytterligare om cylinderns volym är så stor som möjligt?

6.6 De två företagen Knop och Knut har ett intimt samarbete. De utbyter exempelvis personal mellan företagen enligt ett givet mönster: I slutet av varje år överförs 30% av personalen från Knop till Knut och 30% av personalen från Knut till Knop. Vidare räknar Knop med att varje år få ett tillskott av personal på ytterligare ca 20% av det aktuella antalet anställda. Knut har anställningsstopp och förlorar ungefär 10% av sin personal varje år.

a) Ställ upp ett ekvationssystem som beskriver antalet anställda (X och Y) på båda företagen i slutet av ett år med hjälp av procenttalen ovan och antalet anställda vid början av samma år (x och y). Skriv ekvationssystemet på formen $A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$.

b) Bestäm egenvärdena till matrisen A.

c) Bestäm förhållandet mellan antalet anställda inom respektive företag efter ett stort antal år.

Ledning (till c): Bestäm en egenvektor för det egenvärde som är meningsfullt för uppgiften. Med denna egenvektor kan vi beräkna det sökta förhållandet.

6.7 Beräkna A^{-1}, B^{-1}, $A^{-1}B^{-1}$, $B^{-1}A^{-1}$ och $(AB)^{-1}$ om

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Facit till extra övningsuppgifter 3

6.1 (a) När punkten (x, y, z) ligger i planet spänner vektorerna $(x-x_0, y-y_0, z-z_0)$, (a, b, c) och (d, e, f) upp en parallellepiped vars volym är lika med noll.

(b) $2x - 2y + z = 4$

6.2 Till exempel $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$

6.3 (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

(b) $A \cdot (v_1, v_2) = (v_1, -v_2)$.

(c) $A \cdot \vec{v}$ fås genom att spegla $\vec{v}$ i x-axeln.

(d) Egenvärdena 1 och –1 med egenvektorerna $t(1, 2)$ respektive $t(2, -1)$.

(e) $B \cdot \vec{v}$ fås genom att spegla $\vec{v}$ i linjen $(0, 0) + t(1, 2)$.

6.4 (a) Efter t sekunder har cylindern roterat $\varphi = \pi t$ radianer moturs (sett från positiva x-axeln). Det givna sambandet gäller då enligt teorin för multiplikation av komplexa tal (se avsn. 3.5). Vi får $y = y_0 \cos(\pi t) - z_0 \sin(\pi t)$ och $z = y_0 \sin(\pi t) + z_0 \cos(\pi t)$.

(b) $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\pi t) & -\sin(\pi t) \\ 0 & \sin(\pi t) & \cos(\pi t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}$

(c) Vektorn $(1, 0, 0)$ (rotationsaxelns riktning) är egenvektor med egenvärdet 1.

(d) För $t = n2\pi$ (n stycken hela varv) är varje vektor egenvektor (med egenvärdet 1).

6.5 $21 - \pi$

6.6 a) $\begin{bmatrix} 0.84 & 0.27 \\ 0.36 & 0.63 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$

b) 1.72 och –0.25

c) ca 3 gånger fler anställda på Knop än på Knut

6.7

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -5 & 6 & 2 \\ 3 & -3 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad B^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & -3 \end{bmatrix} \qquad A^{-1}B^{1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 31 & -24 & -4 \\ -17 & 13 & 3 \\ 12 & -8 & -3 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1}A^{-1} = (AB)^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 17 & -20 & -6 \\ -23 & 25 & 9 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$